

## Stabiilsus

Olgu mittelineaarne dünaamiline süsteem antud kujul

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = f_i[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); t] \\ i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

maatrikskujul                    kus  $x(t)$   $n \times 1$  olekuvektor  
 $\dot{x}(t) = f[x(t), t]$ ,             $f$   $n \times 1$  mittelineaarne vektorfunktsioon.

$\dot{x}(t) = f[x(t), t]$  – mitteautonoomne süsteem

$\dot{x}(t) = f[x(t)]$  – autonoomne süsteem

$n$  – süsteemi järk

$x(t)$  – olekutrajektoor

Tasakaaluolukord (equilibrium states) on olekud, mille puhul kõik olekumuutujad rahuldavad tingimusi

$$\dot{x}(t) = 0.$$

Tähistame tasakaaluoleku –  $x_e$ .

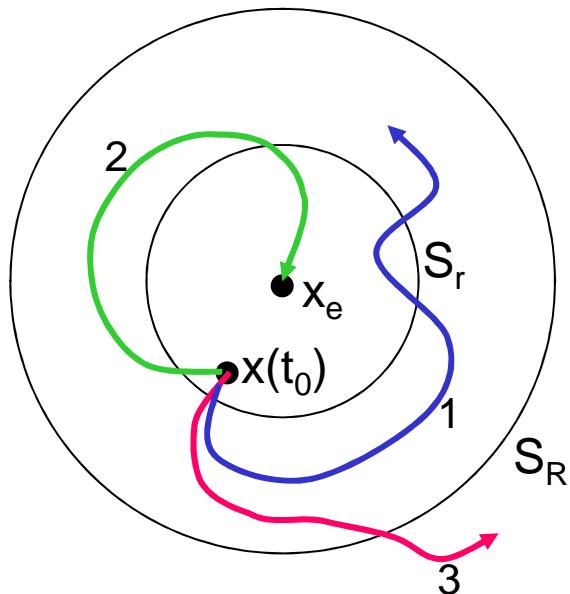
Olgu  $x_e$  isoleeritud tasakaaluolek st. tema ümbruses teisi tasakaaluolekuid ei ole.

Tasakaaluolek  $x_e$  on stabiilne parajasti siis, kui iga algoleku  $x_0$  puhul, mis asub  $x_e$  ümbruses, lahend  $x [ x_0, t ]$  on  $x_e$  ümbruses.

## Definitsioon

Tasakaaluolek  $x_e$  on stabiilne, kui iga  $R>0$  leidub  $r>0$  selline, et

$\|x(t_0)-x_e\| < r$ , siis  $\|x[x(t_0),t]-x_e\| < R$  kõikide  $t \geq t_0$  puhul.



- 1 – stabiilne
- 2 – asümptootiliselt stabiilne
- 3 - mittestabiilne

## Kokkuvõte lineariseerimisest

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f[x(t), u(t)] \\ y(t) = g[x(t), u(t)] \end{cases} \quad \text{mittelineaarne}$$



$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{lineaарне} \\ \text{mittestatsionaарне} \end{array}$$



$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad \text{lineaарне statsionaарне}$$

## Teoreem

### Ljapunovi esimene (lineariseerimise) meetod

1. Lineariseeritud süsteem on stabiilne, kui maatriksi A omaväärtused asuvad s tasandil vasakus pooltasandis. Tegeliku mittelineaarse süsteemi tasakaaluolek on asümptootiliselt stabiilne.
2. Lineariseeritud süsteem on mittestabiilne, kui vähemalt üks A omaväärtustest asub s tasandil paremas pooltasandis. Tegeliku mittelineaarse süsteemi tasakaaluolek on mittestabiilne.
3. Lineariseeritud süsteem on neutraalselt stabiilne, kui vähemalt üks A omaväärtustest asub s tasandi  $i\omega$  teljal. Tegeliku mittelineaarse süsteemi tasakaaluolek võib olla stabiilne, asümptootiliselt stabiilne või mittestabiilne.

Mõned z-teisendused:

$$x(k) = 1, \quad k \geq 0 \rightarrow X(z) = \frac{z}{z-1}, \quad x(kh) = kh, \quad k \geq 0 \rightarrow X(z) = \frac{hz}{(z-1)^2}$$

Pidev

$$x(t) \xrightarrow{h} x(k)$$

$$X(s) = L[x(t)]$$

$$\begin{cases} X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \\ s = \dot{\tau} + j\omega \\ x(t), \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Diskreetne

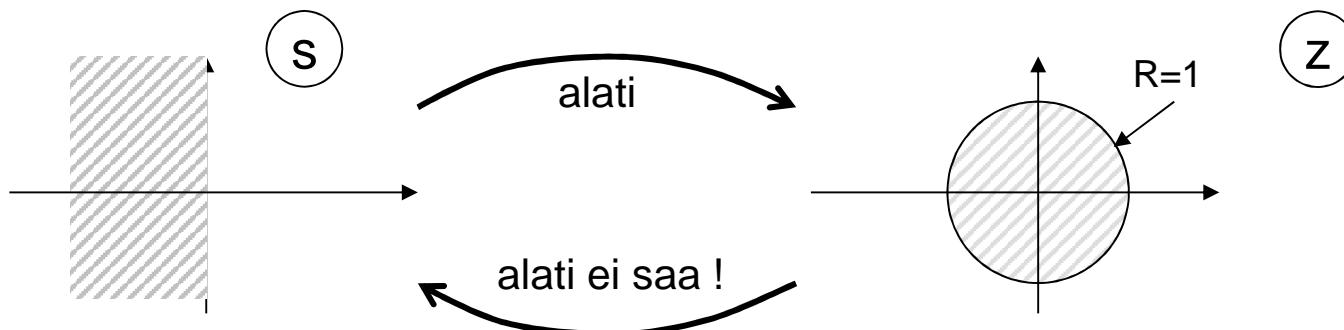
$$x(k)$$

$$X(z) = Z[x(k)]$$

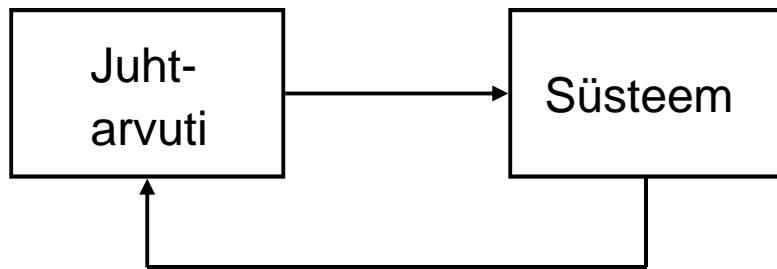
$$\begin{cases} X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} \\ z = \rho + j\vartheta \end{cases}$$

$$x(k), \quad k \geq 0$$

$$z = e^{sh}, \quad h\text{-diskreetimissamm}$$



## Juhitavus, Jälgitavus



### Juhitavus

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) & x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ (A, B) & & (\Phi, \Gamma) &\end{aligned}$$

### Definitsioon (juhitavus)

Süsteem  $(A, B)$  on täielikult juhitav parajasti siis, kui on võimalik selline juhttoime  $u(t)$ , mis viib süsteemi algolekust  $x(0)$  suvaliselt valitud lõppolekusse  $x(T)$  etteantud aja  $T > 0$  jooksul.

## Juhitavuse kriteeriumid

Süsteem  $(A, B)$  on täielikult juhitav, kui maatriksi

$$Q_C = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$$

astak on  $n$ .

$$\text{rank } Q_C = n, \text{ kus } n = \dim[x(t)]$$

Diskreetne süsteem:

$$Q_C = [\Gamma, \Phi\Gamma, \Phi^2\Gamma, \dots, \Phi^{n-1}\Gamma]$$

## Jälgitavus

### Definitsioon (jälgitavus)

Süsteem  $(A, C)$  on täielikult jälgitav parajasti siis, kui algolek  $x(0)$  on määratav väljundi vaatluste alusel vahemikus  $0 \leq t \leq T$ .

### Jälgitavuse kriteeriumid:

1.  $(A, C)$  on täielikult jälgitav, kui maatriksi

$$Q_0 = [C^T, A^T C^T, (A^T)^2 C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T]$$

astak on n.

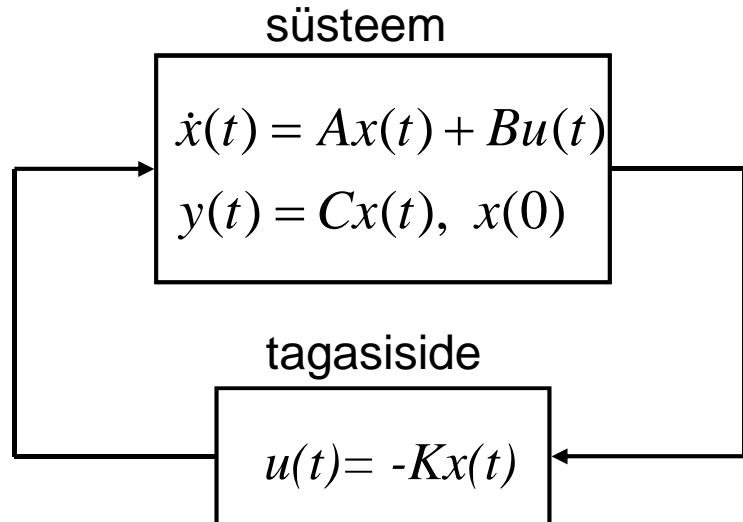
$$\text{rank } Q_0 = n, \text{ kus } n = \dim[x(t)]$$

### Diskreetne süsteem:

$$Q_0 = [C^T, \Phi^T C^T, (\Phi^T)^2 C^T, \dots, (\Phi^T)^{n-1} C^T]$$

# Juhitavuse ja jälgitavuse rakendused

Juhtimissüsteem:



Olgu süsteem  $(A, B)$  täielikult juhitav

Mida juhtimissüsteem peab tegema?

$$x(0) \neq 0 \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Sisuliselt stabiliseerimissüsteem, hoiab süsteemi  
olekus  $x_1() = x_2() = \dots = x_n() = 0$ .

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$\overbrace{u(t)}^{\rightarrow} = -Kx(t)$$

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t), \quad x(0)$$

tagasisidestatud süsteemi vabaliikumise võrrand.

Karakteristlik polünoom

$$\det[sE - A + BK] = \varphi(s), \quad *$$

$$\text{kus } \varphi(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i).$$

- 1) tagasisidestatud süsteemi (soovitavad) omadused on antud  $\varphi(s)$  kujul;
- 2) võrrandist \* leitakse tagasisidemaatriks K.

Diskreetaja süsteemi variant:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) && \text{täielikult juhitav} \\y(k) &= Cx(k), \quad x(0)\end{aligned}$$

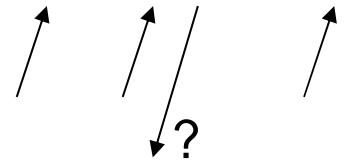
$$u(k) = -Kx(k) \quad \text{tagasiside}$$

$$x(k+1) = (\Phi - \Gamma K)x(k), \quad x(0)$$

tagasisidestatud süsteemi vabaliikumise võrrand

karakteristlik polünoom

$$\det[zE - \Phi + \Gamma K] = \varphi(z)$$

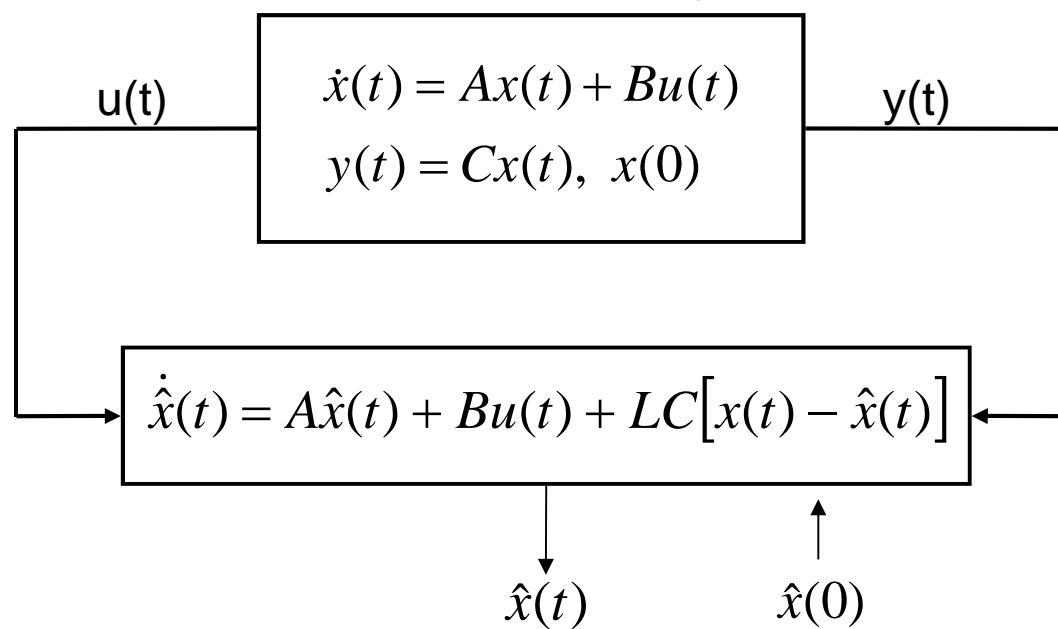


↗ antud

↙? arvutatakse

Jälgimissüsteem:

täielikult jälgitav



$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$-\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + LC[x(t) - \hat{x}(t)]$$

---


$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A - LC)\tilde{x}(t), \quad \text{kus}$$

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

Võrrand  $\dot{\tilde{x}}(t) = (A - LC)\tilde{x}(t)$  on tagasisidestatud süsteemi vabaliikumise võrrand

NB!

$$y(t) = Cx(t), \hat{y}(t) = C\hat{x}(t)$$

$$LC[x(t) - \hat{x}(t)] = L[y(t) - \hat{y}(t)]$$

---

Vabaliikumise võrrandi karakteristlik polünoom

$$\det[sE - A + LC] = \varphi(s)$$

↑      ↓      ?      ↗

antud karakteristlik polünoom  
(soovitud omadused)

Sisuliselt  $L$  on tagasisidemaatriks.

Diskreetaja süsteemi variant:

$$\text{Süsteem: } \begin{cases} x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) = Cx(k), \quad x(0) \end{cases}$$

Olekutaastaja (olekuhindaja):

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = \Phi \hat{x}(k) + \Gamma u(k) + LC[x(k) - \hat{x}(k)], \\ \hat{x}(0). \end{cases}$$

Tagasisidestatud süsteemi vabaliikumise võrrand

$$\begin{cases} \tilde{x}(k+1) = (\Phi - LC)\tilde{x}(k), \text{ kus} \\ \tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k) \end{cases}$$

$$\det[zE - \Phi + LC] = \varphi(z)$$

↗ ↗ ↗ ↗  
? - antud

## Näide No.1

Antud: 1) 
$$\begin{cases} x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) = Cx(k), \quad x(0) \end{cases}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2.5 \end{bmatrix}; \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- 2)  $u(k) = -Kx(k)$
- 3) tagasisidestatud süsteemi karakteristlik polünoom

$$\varphi(z) = z^2 \quad (\text{finiitne süsteem}) !$$

- Leida:
- 1)  $K$ ;
  - 2) Analüüs  $x(1), x(2), \dots, x(\infty)$ .

Lahendus:

- 1) Juhitavuse kontroll
- 2)  $K$  arvutus  $x(k+1) = (\Phi - \Gamma K)x(k)$

$$\det[zE - \Phi + \Gamma K] = \varphi(z)$$

?

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right\} = \det \begin{bmatrix} z & -1 \\ 1+k_1 & z-2.5+k_2 \end{bmatrix} =$$

$$= z^2 + (k_2 - 2.5)z + (k_1 + 1) = z^2$$

$$k_1 = -1, \quad k_2 = 2.5 \rightarrow K = \begin{bmatrix} -1 & 2.5 \end{bmatrix}$$

3) Analüüs

$$x(k+1) = [\Phi - \Gamma K]x(k), \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi - \Gamma K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k=1 \quad x(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$k=2 \quad x(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$k=3 \quad x(3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots \dots \quad k=\infty \quad x(\infty) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Näide No.2

Antud: 1) 
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t), \quad x(0) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -4 & 0 \end{bmatrix},$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

2)  $u(t) = -Kx(t)$

3) tagasisidestatud süsteemi karakteristlik polünoom

$$\varphi(s) = s^2 + 10s + 25$$

Leida: 1) K

2) Tagasisidestatud süsteemi analüüs:

$$X(s), x(\infty) ?$$

Lahendus:

1) Juhitavuse kontroll

$$Q_c = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \dim[x(t)] = 2 \\ \text{rank } Q_c = 2 \end{array} \right\} \text{ täielikult juhitav}$$

2) K arvutus

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t)$$

$$\det[sE - A + BK] = \varphi(s)$$

$$\begin{aligned} \det \left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right\} &= \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ -4 + k_1 & s + k_2 \end{bmatrix} = \\ &= s^2 + k_2 s + (k_1 - 4) = s^2 + 10s + 25 \end{aligned}$$

$$k_2 = 10, \ k_1 = 29 \rightarrow K = [29 \ 10]$$

### 3) Analüüs

$$\dot{x}(t) = \underset{\downarrow L}{(A - BK)x(t)}, \quad x(0)$$

$$sX(s) - x(0) = (A - BK)X(s)$$

$$X(s) = [sE - A + BK]^{-1}x(0)$$

$$sE - A + BK = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 25 & s+10 \end{bmatrix}$$

$$[sE - A + BK]^{-1} = \frac{1}{s^2 + 10s + 25} \begin{bmatrix} s+10 & 1 \\ -25 & s \end{bmatrix}$$

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 10s + 25} \begin{bmatrix} s+10 & 1 \\ -25 & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+12}{s^2 + 10s + 25} \\ \frac{2s-25}{s^2 + 10s + 25} \end{bmatrix}$$

$$x(0) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$\nearrow x(0)$

**m.o.t.t.**

### Näide No.3 Pidevaja jälgimissüsteem

Antud: 1) 
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t), \quad x(0) \end{cases}$$
  $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix},$   
 $C = [0 \quad 1], \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

2) 
$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + LC[x(t) - \hat{x}(t)], \\ \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

3) Tadasisidestatud süsteemi karakteristlik polünoom  
(soovitud omadused)

$$\varphi(s) = s^2 + 10s + 25.$$

Leida: 1)  $L$   
2) analüüsida süsteemi  
 $\tilde{x}(\infty)$ ?

Lahendus:

1. Jälgitavuse kontroll

Veenduge, et antud süsteem on täielikult jälgitav!?

2. Tagasisidemaatriksi  $L$  arvutus

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A - LC)\tilde{x}(t)$$

$$\det[sE - A + LC] \stackrel{?}{=} \varphi(s)$$

$$\det[sE - A + LC] = \det \left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \cdot [0 \quad 1] \right\} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} s & -4 + l_1 \\ -1 & s + l_2 \end{bmatrix} = s^2 + l_2 s + (l_1 - 4) = s^2 + 10s + 25$$

$$l_2 = 10, \quad l_1 = 29 \rightarrow L = \begin{bmatrix} 29 \\ 10 \end{bmatrix}$$

vt. Näide No.1 ja võrdle

$$K = L^T \quad !?$$

Kontroll:

$$\det \begin{bmatrix} s & -4 + l_1 \\ -1 & s + l_2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} s & 25 \\ -1 & s + 10 \end{bmatrix} = s^2 + 10s + 25$$

### 3. Analüüs

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A - LC)\tilde{x}(t)$$

$$s\tilde{X}(s) - \tilde{x}(0) = (A - LC)\tilde{X}(s)$$

$$\tilde{X}(s) = (sE - A + LC)^{-1}\tilde{x}(0)$$

$$(sE - A + LC)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 10s + 25} \begin{bmatrix} s+10 & -25 \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

$$\tilde{X}(s) = \frac{1}{s^2 + 10s + 25} \begin{bmatrix} s+10 & -25 \\ 1 & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x}(0) = x(0) - \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\tilde{x}(0)$

$$\tilde{X}(s) = \frac{1}{s^2 + 10s + 25} \begin{bmatrix} s & -10 \\ s & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s-10}{s^2 + 10s + 25} \\ \frac{s+1}{s^2 + 10s + 25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{X}_1(s) \\ \tilde{X}_2(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\tilde{X}_1(s) &= \frac{s-10}{s^2 + 10s + 25} = \frac{s-10}{(s+5)^2} = \\ &= \frac{K_1}{s+5} + \frac{K_2}{(s+5)^2} = \frac{1}{s+5} + \frac{-15}{(s+5)^2} \xrightarrow{L^{-1}} \tilde{x}_1(t) = e^{-5t} - 15te^{-5t}\end{aligned}$$

$$\tilde{x}_1(0) = 1, \quad \tilde{x}_1(\infty) = 0$$

$$\begin{aligned}\tilde{X}_2(s) &= \frac{s+1}{s^2 + 10s + 25} = \frac{s-1}{(s+5)^2} = \\ &= \frac{1}{s+5} + \frac{-4}{(s+5)^2} = \frac{1}{s+5} + \frac{-15}{(s+5)^2} \xrightarrow{L^{-1}} \tilde{x}_2(t) = e^{-5t} - 4te^{-5t}\end{aligned}$$

$$\tilde{x}_2(0) = 1, \quad \tilde{x}_2(\infty) = 0.$$

Kontrolliks kasutame veel piirväärustusteoreeme.

$$\tilde{x}_1(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\tilde{X}_1(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s(s-10)}{s^2 + 10s + 25} = 1$$

$$\tilde{x}_1(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s\tilde{X}_1(s) = 0$$

$$\tilde{x}_2(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\tilde{X}_2(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s(s+1)}{s^2 + 10s + 25} = 1$$

$$\tilde{x}_2(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s\tilde{X}_2(s) = 0$$

**m.o.t.t.**

## Näide No.4 Diskreetaja jälgimissüsteem

Antud: 1) 
$$\begin{cases} x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) = Cx(k), \quad x(0) \end{cases}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2.5 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2) 
$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = \Phi \hat{x}(k) + \Gamma u(k) + LC[x(k) - \hat{x}(k)] \\ \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

3) Karateristlik polünoom  $\varphi(z) = z^2$ .

Leida: 1)  $L$

2) Analüüsida tagasisidestatud süsteemi  $\tilde{x}(\infty)$  ?

Lahendus:

1. Jälgitavuse kontroll

Veenduge, et antud süsteem on täielikult juhitav.

2. Tagasisidemaatriksi  $L$  arvutus

$$\tilde{x}(k+1) = (\Phi - LC)\tilde{x}(k), \text{ kus}$$

$$\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k)$$

$$\det[zE - \Phi + LC] = \varphi(z)$$

$$\det[zE - \Phi + LC] = \left\{ \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} z & 1+l_1 \\ -1 & z-2.5+l_2 \end{bmatrix} = z^2 + (l_2 - 2.5)z + (l_1 + 1) = z^2$$

$$l_2 = 2.5, \quad l_1 = -1 \rightarrow L = \begin{bmatrix} -1 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

Kontroll:

$$\det \begin{bmatrix} z & 1+l_1 \\ -1 & z-2.5+l_2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} z & 0 \\ -1 & z \end{bmatrix} = z^2$$

### 3. Analüüs

$$\tilde{x}(k+1) = (\Phi - LC)\tilde{x}(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Phi - LC = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k=0 \quad \tilde{x}(0) = x(0) - \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$k=1 \quad \tilde{x}(1) = (\Phi - LC)\tilde{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x}(2) = (\Phi - LC)\tilde{x}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$
$$\tilde{x}(\infty) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$