ISS0022 AUTOMAATJUHTIMISSÜSTEEMIDE JÄTKUKURSUS

4. IDENTIFITSEERIMISEGA ADAPTIIVSÜSTEEMID

Lineaarne diskreetaja regulaator

Olgu n järku skalaarne lineaarne statsionaarne süsteem esitatud diskreetaja mudeliga kujul (joonis 4.1)

$$\mathbf{A(z)y(k)=B(z)u(k)+C(z)v(k)}, \qquad (1)$$

kus **u(k)** ja **y(k)** on juhitava süsteemi sisend ja väljund, **v(k)** on valge müra, **A(z)** on normeeritud **n** astme polünoom

$$\mathbf{A(z)=z^n+a_1z^{n-1}+....+a_{n-1}z+a_n},$$

B(z) **m** astme polünoom

$$\mathbf{B(z)=b_0z^m+b_1z^{m-1}+....+b_{m-1}z+b_m}$$

ja **C(z)** normeeritud **n** astme polünoom

$$\mathbf{C(z)=z^n+c_1z^{n-1}+....+c_{n-1}z+c_n}.$$

Häiringud süsteemile on kirjeldatud filtreeritud valge müra abil, kusjuures **v(k)** matemaatiline ootus on null ja dispersioon σ^2 .

Juhitava süsteemi mudel võib olla antud ka kujul

$$\mathbf{A^*(z^{-1})y(k) = z^{-d}B^*(z^{-1})u(k) + C^*(z^{-1})v(k)} \qquad (1a)$$

kus
$$\mathbf{A^*(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + ... + a_nz^{-n}}$$
$$\mathbf{B^*(z^{-1}) = b_0 + b_1z^{-1} + ... + b_mz^{-m}}$$
$$\mathbf{C^*(z^{-1}) = 1 + c_1z^{-1} + ... + c_nz^{-n}}$$

ja **d=n-m** hilistumine mõõdetuna diskreetimise sammudes.

Regulaator olgu antud kujul

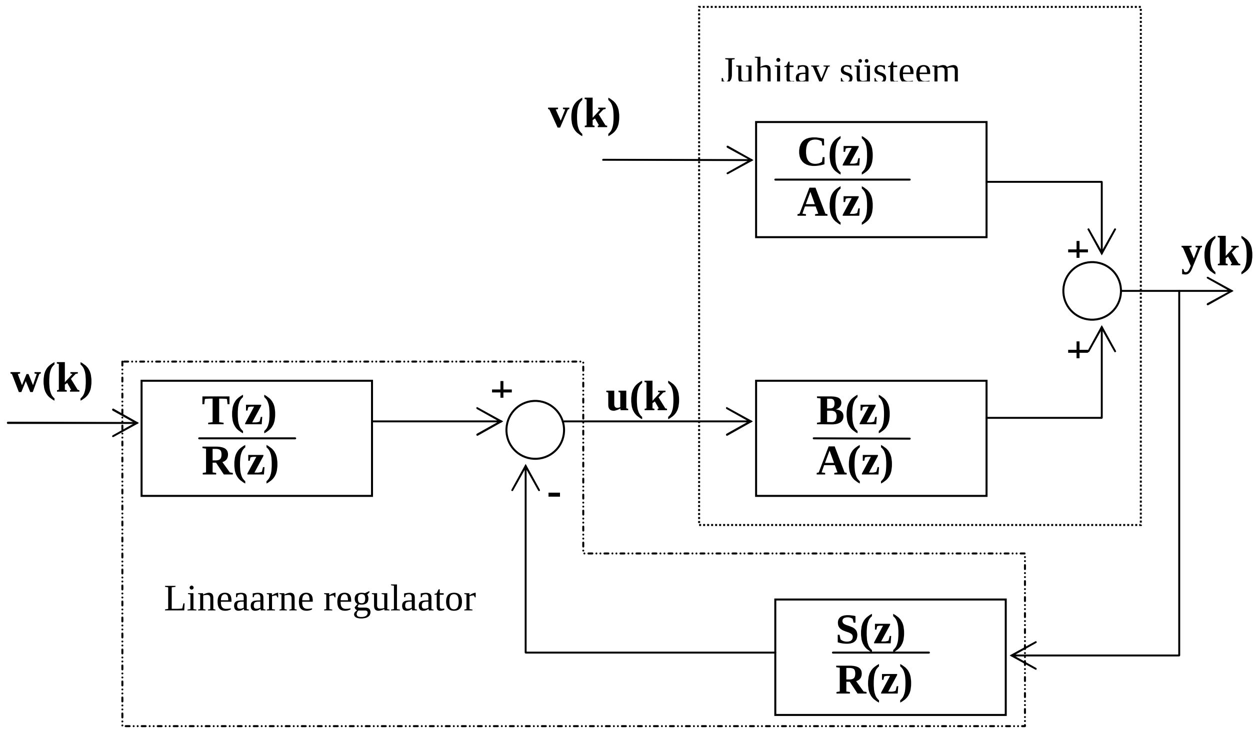
$$\mathbf{R(z)u(k)=T(z)w(k)-S(z)y(k)}, \qquad (2)$$

kus **R(z)** on $\mathbf{n_R}$ astme normeeritud polünoom, **T(z)** on $\mathbf{n_T}$ astme polünoom ja **S(z)** on $\mathbf{n_S}$ astme polünoom ning **w(k)** on seadesuurus.
Regulaatori polünoomide astmed peavad rahuldama realiseeritavuse tingimusi - $\mathbf{n_R>n_T}$ ja $\mathbf{n_R>n_S}$. Kui $\mathbf{n_R=n_T=n_S}$, siis see tähendab, et regulaatoris puudub hilistumine.

Suletud süsteemi käitumine on antud etalonmudeliga kujul

$$\mathbf{A_m(z)y_m(z)=B_m(z)w(k)}, \qquad (3)$$

kus $\mathbf{A_m(z)}$ on $\mathbf{n_M}$ astme normeeritud polünoom ja $\mathbf{B_m(z)}$ on $\mathbf{m_M}$ astme polünoom. Samuti on $\mathbf{n_0}$ astme stabiilne (normeeritud) taastaja polünoom $\mathbf{A_0(z)}$.



Joonis 4.1 Juhtimissüsteemi struktuurskeem

Juhitav süsteem:	A(z)y(k)=B(z)u(k)+C(z)v(k)
Lineaarne regulaator:	R(z)u(k)=T(z)w(k)-S(z)y(k)

Lähtudes juhitava süsteemi ja regulaatori võrranditest (1) ning (2) leiame suletud süsteemi võrrandi

$$\mathbf{y(k) = \frac{B(z)T(z)}{A(z)R(Z) + B(z)S(z)} w(k) + \frac{R(z)}{A(z)R(Z) + B(z)S(z)} v(k)}.$$

Lähtudes sellest, et suletud süsteem peab käituma täpselt nagu etalonmudel, saame tingimused regulaatori sünteesiks kujul

$$\mathbf{\frac{B(z)T(z)}{A(z)R(Z) + B(z)S(z)} = \frac{B_m(z)}{A_m(z)}}. \tag{5}$$

Arendame polünoomi **B(z)** kujul

$$\mathbf{B(z) = B^+(z)B^-(z)} \tag{6}$$

kus $\mathbf{B^+(z)}$ on $\mathbf{m^+}$ astme stabiilne normeeritud polünoom, mille nullid on stabiilsed ja kiiresti sumbuvad ning taandatakse regulaatoriga välja. $\mathbf{B^-(z)}$ $\mathbf{m^-}$ astme polünoom, mille nullid on mittestabiilsed või halvasti sumbuvad. Järelikult $\mathbf{B^-(z)}$ peab olema $\mathbf{B_m(z)}$ teguriks, seega

$$\mathbf{B_m(z) = B^-(z)B'_m(z)}.$$

Kuna $\mathbf{B^+(z)}$ taandatakse välja, siis peab ta olema **A(z)R(z)+B(z)S(z)** teguriks. Tingimusest (5) järeldub, et $\mathbf{A_m(z)}$ peab olema samuti **A(z)R(z)+B(z)S(z)** teguriks. Suletud süsteemi karakteristlik polünoom on

$$\mathbf{A_c(z) = A_0(z)A_m(z)B^+(z) = A(z)R(z) + B(z)S(z))}. \tag{7}$$

$\mathbf{A_c(z)}$ on $\mathbf{n_c}$ astme polünoom ja $\mathbf{n_c=n_0+n_M+m^+}$.

Kuna $\mathbf{B^+(z)}$ on **B(z)** tegur ja samuti **A(z)R(z)+B(z)S(z)** tegur, siis on ta ka **R(z)** tegur

$$\mathbf{R(z) = B^+(z)R'(z)}.$$

Arvestades polünoomide **B(z)**, $\mathbf{B_m(z)}$ ja **R(z)** arendusi, on võrrand (5) esitatav kujul

$$\mathbf{\frac{T(z)}{A(z)R'(z) + B^-(z)S(z)} = \frac{A_0(z)B'_m(z)}{A_0(z)A_m(z)}} \tag{8}$$

kus parema poole lugeja ja nimetaja on korrutatud taastaja polünoomiga $\mathbf{A_0(z)}$. Põhimõtteliselt polünoomvõrrand (7) omab palju lahendeid. Kui $\mathbf{R_0(z)}$ ja $\mathbf{S_0(z)}$ on lahendid, siis teised lahendid on esitatavad kujul

$$\mathbf{R(z)=R_0(z)+Q(z)B(z)},$$
$$\mathbf{S(z)=S_0(z)-Q(z)A(z)},$$

kus **Q(z)** on suvaline polünoom.

Praktika seisukohalt on oluline sünteesida regulaator võimalikult madalat järku. Analüüsides avaldist **A(z)R(z)+B(z)S(z)** selgub, et kõrgeimat järku on liige **A(z)R(z)** (kuna **n>m**), järelikult

$$\mathbf{n_R=n_C-n=n_0+n_M+m^+-n},$$

$$\mathbf{n_S<n},$$
$$\mathbf{n_C=n_0+n_M+m^+\geq 2n-1}. \qquad (9)$$

Sünteesiülesanne omab lahendit parajasti siis, kui on rahuldatud järgmised tingimused:

(**A**) $\mathbf{n_M-m_M\geq n-m}$,

(**B**) $\mathbf{n_0\geq 2n-n_M-m^+-1}$. (10)

Sisuliselt tähendavad tingimused järgmist:

(**A**) - etalonmudelis ei tohi hilistumine olla väiksem kui juhitavas süsteemis (regulaatori lisamisel hilistumine kas jääb samaks või suureneb);
(**B**) - realiseeritava (põhjusliku) lahenduse saamiseks peab olema $\mathbf{A_0(z)}$ piisavalt kõrget järku.

Järgnevalt esitame lineaarse diskreetaja regulaatori sünteesi formaliseeritud skeemi põhiliste etappide kaupa:

1.etapp - algandmete korrastamine (struktuursete parameetrite fikseerimine ja vajadusel ka polünoomide normeerimine):

- juhitav süsteem: $\mathbf{A(z)}$ $\mathbf{n}$ astme polünoom, $\mathbf{B(z)}$ $\mathbf{m}$ astme polünoom;
- etalonmudel: $\mathbf{A_m(z)}$ $\mathbf{n_M}$ astme polünoom, $\mathbf{B_m(z)}$ $\mathbf{m_M}$ astme polünoom, $\mathbf{A_0(z)}$ n_0 astme taastaja polünoom (mille aste peab rahuldama tingimust (10) (**B**)).

2.etapp - esitame polünoomid $\mathbf{B(z)}$ ja $\mathbf{B_m(z)}$ kujul

$$\mathbf{B(z) = B^+(z)B^-(z)},$$
$$\mathbf{B_m(z) = B^-(z)B'_m(z)}$$

kus $\mathbf{B^+(z)}$ on $\mathbf{m^+}$ astme stabiilne normeeritud polünoom ja $\mathbf{B^-(z)}$ $\mathbf{m^-}$ astme polünoom. Samuti saab nüüd kontrollida, kas taastaja polünoomi $\mathbf{A_0(z)}$ aste $\mathbf{n_0}$ rahuldab tingimust (10) (**B**)

$$\mathbf{n_0\geq 2n-n_M-m^+-1}$$

ning vajadusel valida uus taastaja polünoom.

<u>Märkus:</u> Polünoomi $\mathbf{B(z)}$ arendamisel on küllalt olulised kaks äärmuslikku juhtumit. Esiteks, taandatakse välja kõik juhitava süsteemi nullid s.t. $B^-(z)=\mathbf{b_0}$ ja $\mathbf{B^+(z)=\frac{B(z)}{b_0}}$. Teiseks, ei taandata välja mitte ühtegi juhitava süsteemi nulli s.t.

$$\mathbf{B^-(z) = B(z)\ \text{ja}\ B^+(z)=1}.$$

3.etapp - lineaarse regulaatori struktuuri määramine ja polünoomvõrrandi lahendamine:

- regulaatori polünoomide $\mathbf{R'(z)}$ ja $\mathbf{S(z)}$ astmed $\mathbf{n_{R'}}$ ja $\mathbf{n_S}$ vastavalt, on määratavad järgmistest tingimustest

$$\mathbf{n_{R'}=n_0+n_M-n},$$
$$\mathbf{n_S<n};$$

- polünoomvõrrandi lahendamine määramata kordajate meetodil

$$\mathbf{A(z)R'(z) + B^-(z)S(z) = A_0(z)A_m(z)}$$

4.etapp - lineaarse dikreetaja regulaatori formeerimine kujul

$$\mathbf{R(z)u(k)=T(z)w(k)-S(z)y(k)},$$

kus polünoomid **R(z)** ja **T(z)** on arvutatavad järgmiselt:

$$\mathbf{R(z)=B^+(z)R'(z)}\ ,$$
$$\mathbf{T(z)=A_0(z)B_m'(z)}\ .$$

R(z) on $\mathbf{n_R}$ astme $\mathbf{(n_R=n_0+n_M+m^+-n)}$ ja **T(z)** $\mathbf{n_T}$ astme $\mathbf{(n_T=n_0+m_M-m^-)}$ polünoomid.

Identifitseeritavus tagasisidestatud süsteemis

Analüüsimaks identifitseeritavuse probleemi tagasisidestatud süsteemis, lähtume süsteemist, mis koosnev juhitavast süsteemist (1)

$$\mathbf{A(z)y(k)=B(z)u(k)+C(z)v(k)} \qquad (1)=(11)$$

ja lineaarsest regulaatorist (2)

$$\mathbf{R(z)u(k)=T(z)w(k)-S(s)y(k)}. \qquad (2)=(12)$$

Kuna seadesuurus võib omada suvalist väärtust, siis olgu **w(k)=0**. Sellisel juhul lineaarse regulaatori võrrand on esitatav kujul

$$\mathbf{u(k) = -\frac{S(z)}{R(z)}y(k)} \qquad (13)$$

Suletud süsteemi võrrand on esitatav kujul

$$\mathbf{A(z)y(k) = B(z) - \frac{-S(z)}{R(z)}y(k) + C(z)v(k)}\ .$$

Esiteks uurime seda, kas suletud süsteemis on määratavad üheselt juhitava süsteemi struktuursed parameetrid. Liidame suletud süsteemi võrrandi mõlemale poolele **Q(z)y(k)** **(Q(z)** on suvaline polünoom) ja saame teisendatud võrrandi

$$\mathbf{[A(z)+Q(z)]y(k) = \left[B(z) - Q(z)\frac{R(z)}{S(z)}\right]\frac{-S(z)}{R(z)}y(k) + D(z)v(k)}$$

ja korrutades polünoomiga **S(z)** võrrandi mõlemat poolt

$$\left[\mathbf{A(z)+S(z)}\right]\mathbf{S(z)}=\left[\mathbf{B(z)S(z)-Q(z)R(z)}\right]\frac{\mathbf{-S(z)}}{\mathbf{R(z)}}\mathbf{y(k)+D(z)S(z)v(k)}$$

ning tähistades

$$\mathbf{A'(z)=[A(z)+S(z)]S(z)},$$

$$\mathbf{B'(z)=B(z)S(z)-Q(z)R(z)},$$

$$\mathbf{D'(z)=D(z)S(z)}$$

ja arvestades (13), on teisendatav avaldis esitatav kujul

$$\mathbf{A'(z)y(k)=B'(z)u(k)+D'(z)v(k)}. \qquad (14)$$

Juhitava süsteemi võrrandite (1) ja (14) struktuurne identsus tähendab seda, et suletud süsteemis ei ole võimalik määrata struktuurseid parameetreid (antud juhul polünoomide **A(z)**, **B(z)** ja **C(z)** astmed) ja need peavad olema eelnevalt teada (**identifitseeritavus tagasisidestatud süsteemis - esimene tingimus**).

Teiseks analüüsime, milliseid astme nõudeid peavad rahuldama lineaarse regulaatori polünoomid, et parameetrite hindamine suletud süsteemis oleks võimalik. Eeldame, et mõõdame ainult väljundit **y(k)** ja veel, et regulaatori polünoomid on teada. Sisendit ei ole vaja mõõta, sest **u(k)** on suletud süsteemis **y(k)** alusel üheselt määratav. Leiame ülekande häiringult **e(k)** väljundisse **y(k)**

$$\frac{\mathbf{y(k)}}{\mathbf{e(k)}}=\frac{\mathbf{C(z)R(z)}}{\mathbf{A(z)R(z)+B(z)S(z)}}=\frac{\mathbf{Q(z)}}{\mathbf{P(z)}}=\frac{\mathbf{q_0z^0+q_1z^{r-1}+...+q_{r-1}z+q_r}}{\mathbf{z^1+p_1z^{l-1}+...+p_{l-1}z+p_l}} \qquad (15)$$

Hinnates parameetreid tagasisidestatud süsteemis signaalide **u(k)** ja **y(k)** alusel, saame avaldise (15) lugeja ja nimetaja polünoomide **Q(z)** ja **P(z)** kordajate hinnangud, mitte aga polünoomide **A(z)**, **B(z)** ja **C(z)** hinnanguid, milliseid soovisime saada. Probleem on selles, millistel tingimustel on võimalik **C(z)** kordajate hinnangud leida **Q(z)** kordajate hinnangute alusel ja **A(z)** ning **B(z)** kordajate hinnangud **P(z)** kordajate hinnangute alusel, lähtudes ülekandest (15).

Avaldisest (15) järeldub (**identifitseeritavus tagasisidestatud süsteemis - teine tingimus** ehk astmete tingimus)

$$\mathbf{r>n+n_R},$$
$$\mathbf{l=max\{n+n_R,\ m+n_S\}>n+m}. \qquad (16)$$

Tingimus (16) tähendab seda, et parameetrite hindamiseks tagasisidestatud süsteemis peab olema regulaator piisavalt kõrget järku.

<u>Märkus</u>: On lihtne veenduda, et Åström-Wittenmarki lineaarse regulaatori korral on identifitseeritavuse teine tingimus automaatselt täidetud.

Väljundi dispersiooni minimiseeriv regulaator

Olgu juhitav süsteem antud kujul (1)

$$\mathbf{A(z)y(k)=B(z)u(k)+C(z)v(k)}. \qquad (1)$$

Juhtimise kriteeriumiks olgu ruutkriteerium kujul

$$\mathbf{I=E\{y^2(k)\}}, \qquad (17)$$

kus **E** tähistab matemaatilist ootust. Optimaaljuhtimise ülesanne on seega järgmine

$$\min_{u(k)} \mathbf{I} \qquad (18)$$

kusjuures lubatavateks juhtimisteks **u(k)** loeme juhtsignaale, mis rahuldavad tingimust kujul (s.t. on realiseeritavad)

$$\mathbf{u(k)=f[y(k),y(k-1),..;\ u(k-1),u(k-2),..]} \qquad (19)$$

Esmalt vaatleme optimaalse prognoosi ülesannet. See tähendab, et me soovime ennustada juhitava süsteemi väljundit teatud arv samme ette, mida on vaja hilistumisega süsteemide juhtimiseks.
Juhitava süsteemi mudelist (1) eeldusel, et **u(k)=0**, saame prognoositava juhusliku protsessi võrrandi kujul

$$\mathbf{y(k)=\frac{C(z)}{A(z)}v(k)=\frac{C^*(z^{-1})}{A^*(z^{-1})}v(k)} \qquad (20)$$

Eeldame, et **C(z)** on **n** astme stabiilne polünoom. Vaatleme ajahetke **k**. Selleks hetkeks on meil teada **y(k), y(k-1),y(k-2), ...** ja me soovime selle info alusel ennustada m sammu ette s.t. väärtust **y(k+m)**. Avaldisest (20) saame

$$\mathbf{y(k+m)=\frac{C^*(z^{-1})}{A^*(z^{-1})}v(k+m)} \qquad (21)$$

ja pärast polünoomide jagamist

$$\mathbf{y(k+m)=\{v(k+m)+f_1v(k+m-1)+....+f_{m-1}v(k+1)\}+}$$

$$\mathbf{+[f_mv(k)+f_{m-1}v(k-1)+...]}$$

Prediktor on seega esitatav kujul

$$\mathbf{y(k+m|k)=f_mv(k)+f_{m+1}v(k-1)+......}$$

ja prognoosi (ennustamise) viga kujul

$$\mathbf{y(k+m|k)=y(k+m)-y(k+m|k)}$$

$$\mathbf{=v(k+m)+f_1v(k+m-1)+....+f_{m-1}v(k+1).}$$

Eesmärgiks on konstrueerida optimaalne prediktor $\mathbf{E\{y^2(k+m|k)\}}$ mõttes.

Teoreem: Olgu meil prognoositav juhuslik protsess **{y(k)}** antud võrrandiga (20), siis m-sammuline optimaalne prediktor on esitatav kujul

$$\mathbf{y=y(k+m|k)=\frac{zG(z)}{C(z)}y(k)=\frac{G^*(z^{-1})}{C^*(z^{-1})}y(k)} \qquad (22)$$

$$\mathbf{z^{m-1}C(z)=A(z)F(z)+G(z)},$$

kus $\mathbf{F(z)=z^{m-1}+f_1z^{m-2}+....+f_{m-2}z+f_{m-1}}$,

$\mathbf{G(z)=g_0z^{n-1}+g_1z^{n-2}+....+g_{n-2}z+g_{n-1}}$.

Prognoosi (ennustamise) viga on esitatav kujul

$$\mathbf{y(k+m|k)=F(z)v(k+1)}$$

ja

$$\mathbf{E\{y(k+m)\}=0},$$

$$\mathbf{E\{y^2(k+m|k)\}=[1+(f_1)^2+...+(f_{m-1})^2]\ ^2}.$$

Tõestus: Toome sisse järgmised polünoomid

$$\mathbf{F^*(z^{-1})=1+f_1z^{-1}+....+f_{m-1}z^{-m+1}},$$

$$\mathbf{G^*(z^{-1})=g_0+g_1z^{-1}+....+g_{n-1}z^{-n+1}},$$

$$\mathbf{A^*(z^{-1})=1+a1z^{-1}+....+a_nz^{-n}},$$

$$\mathbf{C^*(z^{-1})=1+c_1z^{-1}+....+c_nz^{-n}}.$$

Seega $\mathbf{A^*(z^{-1})=z^{-n}A(z)}$, $\mathbf{C^*(z^{-1})=z^{-n}C(z)}$ ja $\mathbf{(z^{m-1})^*=z^{-(m-1)}z^{m-1}=1}$.

Võrrand

$$\mathbf{z^{m-1}C(z)=A(z)F(z)+G(z)},$$

on esitatav ka teisel kujul

$$\mathbf{C^*(z^{-1})=A^*(z^{-1})F^*(z^{-1})+z^{-m}G^*(z^{-1})}. \qquad (23)$$

Avaldisest (21) võttes arvesse (23) ja (20), saame

$$\mathbf{y(k+m)=F^*(z^{-1})v(k+m)+\frac{G^*(z^{-1})}{A^*(z^{-1})}v(k)},$$

$$\mathbf{=F^*(z^{-1})v(k+m)+\frac{G^*(z^{-1})}{C^*(z^{-1})}y(k)}. \qquad (24)$$

Avaldises (24) esimene liidetav sõltub **v(k+1), v(k+2), ...** ja teine liidetav sõltub **y(k), y(k-1), ...** Järelikult **y(k+m)** hinnanguna on põhimõtteliselt kasutatav ainult teine liidetav, kuna sisaldab ajahetkeks k olemasolevat infot.

Järgnevalt kirjutame välja prognoosi (ennustamise) vea avaldise

$$\mathbf{E\left\{[y(k+m)-y]^2\right\} = E\left\{[F^*(z^{-1})v(k+m)]^2\right\} + E\left\{\left[\frac{G^*(z^{-1})}{C^*(z^{-1})}y(k)-y\right]^2\right\} +}$$
$$\mathbf{+\,2E\left\{[F^*(z^{-1})v(k+m)] * \left[\frac{G^*(z^{-1})}{C^*(z^{-1})}y(k)-y\right]\right\}} \qquad (25)$$

Avaldises (25) on kolmas liidetav võrdne nulliga, kuna kandilistes sulgudes olevad avaldised on statistiliselt sõltumatud ja järelikult minimaalse väärtuse annab olukord, kui

$$\mathbf{y=y(k+m\,|\,k)=\frac{G^*(z^{-1})}{C^*(z^{-1})}y(k)}$$

Seega on teoreem tõestatud.

Optimaalse prediktori polünoomid **F(z)** ja **G(z)** on kergesti leitavad avaldisest

$$\mathbf{\frac{z^{m-1}C(z)}{A(z)} = F(z) + \frac{G(z)}{A(z)}} \qquad (26)$$

vastavate polünoomide jagamisega või siis järgnevast arvutusskeemist:

$\mathbf{f_1=c_1-a_1}$
$\mathbf{f_2=c_2-a_2-a_1f_1}$
....
$\mathbf{f_{m-1}=c_{m-1}-a_{m-1}-a_{m-2}f_1-...-a_1f_{m-2}}$
$\mathbf{g_0=c_m-a_m-a_{m-1}f_1-...-a_1f_{m-1}}$
$\mathbf{g_1=c_{m+1}-a_{m+1}-a_mf_1-...-a_2f_{m-1}}$
....
$\mathbf{g_{n-m}=c_n-a_n-a_{n-1}f_1-...-a_{n-m+1}f_{m-1}}$
$\mathbf{g_{n-m+1}=-a_nf_1-a_{n-1}f_2-...-a_{n-m+2}f_{m-1}}$
....
$\mathbf{g_{n-1}=-anf_{m-1}}$.

Järgnevalt vaatleme optimaalsel prediktoril põhinevaid väljundi dispersiooni (17) miniseerivate regulaatorite sünteesi.

Lähtume juhitavast süsteemist (1), esitades mudeli kujul

$$\mathbf{y(k) = \frac{B(z)}{A(z)}u(k) + \frac{C(z)}{A(z)}e(k)}$$
$$\mathbf{= \frac{B^*(z^{-1})}{A^*(z^{-1})}z^{-d}u(k) + \frac{C^*(z^{-1})}{A^*(z^{-1})}v(k)} \qquad (27)$$

Esmalt avaldame juhitava süsteemi mudelist (27) **v(k)**

$$\mathbf{v(k)=\frac{A^*(z^{-1})}{C^*(z^{-1})}y(k)-z^{-d}\frac{B^*(z^{-1})}{C^*(z^{-1})}u(k)} \qquad (28)$$

Juhitavas süsteemis (27) on hilistumine **d** sammu, seega on antud objekti juhtimiseks vajalik ennustada väljundit **d** sammu ette **(s.t. m=d)**

$$\mathbf{y(k+d)=\frac{B^*(z^{-1})}{A^*(z^{-1})}u(k)+\frac{C^*(z^{-1})}{A^*(z^{-1})}v(k+d)}$$

ja asendades $\mathbf{\frac{C^*}{A^*}}$ avaldisest (23), saame

$$\mathbf{y(k+d)=\frac{B^*(z^{-1})}{A^*(z^{-1})}u(k)+F^*(z^{-1})v(k+d)+\frac{G^*(z^{-1})}{A^*(z^{-1})}v(k)}$$

Nüüd asendades **v(k)** avaldisega (28) ja arvestades (23), **y(k+d)** avaldis omandab vajaliku kuju

$$\mathbf{y(k+d)=F^*(z^{-1})e(k+d)+\frac{G^*(z^{-1})}{C^*(z^{-1})}y(k)-z^{-d}\frac{B^*(z^{-1})G^*(z^{-1})}{A^*(z^{-1})C^*(z^{-1})}u(k)+\frac{B^*(z^{-1})}{A^*(z^{-1})}u(k)}$$
$$\mathbf{=F^*(z^{-1})e(k+d)+\frac{G^*(z^{-1})}{C^*(z^{-1})}y(k)-z^{-d}\frac{B^*(z^{-1})F^*(z^{-1})}{C^*(z^{-1})}u(k)} \qquad (29)$$

Järgnevalt lahendame optimaaljuhtimise ülesande (18)

$$\mathbf{E\{[y^2(k+d)]\}=E\{[F^*(z^{-1})v(k+d)]^2\}+E\left\{\left[\frac{G^*(z^{-1})}{C^*(z^{-1})}y(k)+\frac{B^*(z^{-1})F^*(z^{-1})}{C^*(z^{-1})}u(k)\right]^2\right\}}$$

Analüüsides saadud juhtimise kriteeriumi avaldist selgub, et see saavutab miinimumi parajasti siis, kui

$$\mathbf{u(k)=-\frac{G^*(z^{-1})}{B^*(z^{-1})F^*(z^{-1})}y(k)=-\frac{G(z)}{B(z)F(z)}y(k)}. \qquad (30)$$

Sellega on süsteemi väljundi dispersiooni minimiseeriva regulaatori algoritm leitud. Avaldisest (30) järeldub, et leitud algoritm on kasutatav ainult minimaalfaasiliste juhitavate süsteemide puhul, kusjuures lisaks sellele peaksid juhitava süsteemi nullid olema kiiresti sumbuvad. Selgitamaks väljundi dispersiooni miniseeriva regulaatori omadusi, leiame suletud süsteemi võrrandi lähtudes (27) ja (30)

$$\mathbf{[A(z)B(z)F(z)+B(z)G(z)]y(k)=B(z)C(z)F(z)v(k)}, \qquad (31)$$

millest selgub, et suletud süsteemi dünaamikat määrav karakteristlik polünoom on järgmine

$$\mathbf{A_C(z)=A(z)B(z)F(z)+B(z)G(z)}$$

$$\mathbf{=B(z)[A(z)F(z)+G(z)]}$$

$$\mathbf{=z^{d-1}B(z)C(z)}. \qquad (32)$$

Suletud süsteemil 2n-d poolust on polünoomide **B(z)** ja **C(z)** juured ja **d-1** poolust on koordinaatide alguses (sest **m=d**).

Väljundi dispersiooni minimiseeriv regulaator on vaadeldav ka teatud kindlate omadustega lineaarse regulaatorina, selleks lähtume avaldisest prediktori polünoomvõrrandist (23), mida korrutades polünoomiga **B(z)** saame

$$\mathbf{z^{d-1}C(z)B(z)=A(z)R(z)+B(z)S(z)}, \tag{33}$$

kus **R(z)=B(z)F(z)** ja **S(z)=G(z)**. Vastav lineaarne regulaator on esitatav kujul

$$\mathbf{u(k) = -\frac{R(z)}{S(z)} y(k) = -\frac{G(z)}{B(z)F(z)} y(k)}$$

Kui juhitav süsteem ei ole minimaalfaasiline või on nullid aeglaselt sumbuvad, siis arendame polünoomi **B(z)** juba tuntud viisil (6)

$$\mathbf{B(z) = B^{+}(z)B^{-}(z)},$$

kus $\mathbf{B^{+}(z)}$ nullid on stabiilsed ja kiiresti sumbuvad ning $\mathbf{B^{-}(z)}$ nullid on mittestabiilsed või aeglaselt sumbuvad.

Saab tõestada juba tuntud viisil, et sellisel juhul väljundi dispersiooni minimiseeriva regulaatori võrrand omandab kuju

$$\mathbf{u(k) = -\frac{G(z)}{B^{+}(z)F(z)} y(t)} \tag{34}$$

ning **F(z)** ja **G(z)** on arvutatavad võrrandist

$$\mathbf{z^{d-}C(z)B^{-*}(z) = A(z)F(z) + B^{-}(z)G(z)}, \tag{35}$$

kus **F(z)** on $\mathbf{n_F=d+m^{-}-1}$ astme polünoom. Suletud süsteemi karakteristlik polünoom omab kuju

$$\mathbf{A_C(z) = z^{d-}B^{+}(z)B^{-*}(z)C(z)}$$

Väljundi dispersiooni minimiseeriv regulaator omab põhiliselt teoreetilist tähtsust, kuna ta sisaldab prediktorit ja on aluseks prediktorjuhtimisele s.t. regulaatoritele, mille algoritmid põhinevad juhitava süsteemi oleku või väljundi prognoosil lõplik arv samme ette. Regulaatori praktilist kasutamist takistab suur tundlikkus diskreetimissammu suhtes, väikese diskreetimissammu korral on võimalikud väga suured juhtsignaalid.

Praktilist tähtsust omavad niinimetatud üldistatud väljundi dispersiooni minimiseerivad regulaatorid, mis saadakse juhtimise kriteeriumi $\mathbf{I=E\{y^2(t)+ru^2(t)\}}$ minimiseerimisel, kuna parameetriga **r** on võimalik piirata juhtsignaali väärtust.

Parameetrite hindamine reaalajas

Vaatleme dünaamilise süsteemi parameetrite hindamist reaalajas seonduvalt identifitseerimisega adaptiivsüsteemidega.

Parameetri hindamise probleemi esitamisel lähtume skalaarse lineaarse statsinaarse süsteemi diskreetaja mudelist kujul

$$\mathbf{A(z^{-1})y(k) = z^{-d}B(z^{-1})u(k)}\,, \tag{36}$$

kus $\mathbf{A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + ... + a_n z^{-n}}$,

$\mathbf{B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + ... + b_m z^{-m}}$

ja **d** hilistumine mõõdetuna diskreetimise sammudes.
Dünaamilise süsteemi mudel võib olla antud ka diferentsvõrrandi kujul

$$\mathbf{y(k)+a_1y(k\text{-}1)+....+a_ny(k\text{-}n)=b_1u(k\text{-}d\text{-}1)+b_2u(k\text{-}d\text{-}2)+....+b_my(k\text{-}d\text{-}m)} \tag{37}$$

Käesolevas alajaotuses eeldame, et **y(k)** ja **u(k)** tähistavad signaalide variatsioone s.t.reaalsete signaalide **Y(k)** ja **U(k)** kõrvalekaldeid väljakujunenud väärtustest $\mathbf{Y_\infty}$ ja $\mathbf{U_\infty}$

$$\mathbf{u(k)=U(k)\text{-}U_\infty}\,,$$

$$\mathbf{y(k)=Y(k)\text{-}Y_\infty}\,. \tag{38}$$

Parameetrite hindamine seisneb polünoomide $\mathbf{A(z^{-1})}$ ja $\mathbf{B(z^{-1})}$ kordajate $\mathbf{a_i}$ ning $\mathbf{b_j}$ hindamises **u(k)** ja **y(k)** mõõtetulemuste alusel, eeldusel, et polünoomide astmed **n** ja **m** ning hilistumine **d** on teada.

Parameetrite hindamisel enamkasutatavaks meetodiks on vähimruutmeetod ja tema mitmesugused modifikatsioonid. Vähimruutmeetodi tuletamiseks lähtume matemaatilisest mudelist kujul (37). Ajahetkel **k** on meil olemas järgmised **u(k)** ja **y(k)** mõõtetulemused:

- **u(k-1),u(k-2),....** ;
- **y(k-1),u(k-2),....**

ning teades polünoomide $\mathbf{A(z^{-1})}$ ja $\mathbf{B(z^{-1})}$ kordajate hinnanguid $\mathbf{a_i}$ ning $\mathbf{b_j}$ on võimalik mudeli (37) alusel hinnata (prognoosida) väljundit

$$\mathbf{\hat{y}(k|k-1) = -a_1 y(k-1) - ... - a_n y(k-n) + b_1 u(k-d-1) + ... + b_m u(k-d-m)}\,. \tag{39}$$

Väljundi hinnangu vea defineerime järgmiselt

$$\mathbf{e(k) = y(k) - \hat{y}(k|k-1)}\,, \tag{40}$$

kus **y(k)** on mõõdetud väärtus.

Arvestades eelnevat on mudel (37) esitatav kujul

$$\mathbf{y(k) = \varphi^T(k)\hat{\Theta}(k-1) + e(k)}\,, \tag{41}$$

kus $\boldsymbol{\varphi}\mathbf{(k)}$ on andmevektor kujul

$$\varphi^T(k)=[-y(k-1),...,-y(k-n);\ u(k-d-1),...,u(k-d-m)],$$

$\hat{\Theta}(k-1)$ on parameetrite vektor kujul

$$\hat{\Theta}^T(k-1)=[a_1,...,a_n;b_1,...,b_m]$$

ja **e(k)** väljundi prognoosi viga.
Mudelist (41) **e(k)** ära jätmisel saame regressioonmudeli.
Eeldades, et meil on piisavalt **u(k)** ja **y(k)** mõõtetud väärtusi, moodustame

- **andmemaatriksi** , mille ridadeks on andmevektorid $\varphi^T(m+d-1),....,\varphi^T(m+d+N-1)$ ja $N > n + m$ (hinnatavate parameetrite arv);

- **parameetrite vektori** Θ, kujul (7.41);

- **väljundite vektor Y**, veeruvektor, mille elementideks on väljundi mõõtetulemused $y(m+d),....,y(m+d+N)$;

- **veavektori E** , veeruvektor, mille elementideks on $e(m+d),....,e(m+d+N)$.

Mudel (41) on esitatav kujul

$$Y = \Phi\Theta + E. \tag{42}$$

Järgnevalt lahendame parameetrite hindamise ülesande vähimruutmeetodil, minimiseerides vea ruutu

$$I = \frac{1}{2}E^TE = \frac{1}{2}(Y-\Phi\Theta)^T(Y-\Phi\Theta) \tag{43}$$

saame , et selleks tuleb lahendada normaalvõrrandite süsteem

$$\Phi^T\Phi\hat{\Theta} = \Phi Y\,, \tag{44}$$

mille lahend on esitatav kujul

$$\hat{\Theta} = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T Y\,. \tag{45}$$

Saadud tulemus ei ole kasutatav reaalajas töötavates adaptiivsüsteemides, kuna eeldab teatava aja vältel mõõteandmete kogumist ja alles siis on võimalik saada parameetrite hinnangud.

Parameetrite hindamiseks reaalajas konstrueerime vähimruutmeetodi rekurrentse arvutusskeemi, lähtudes parameetrite vähimruuthinnangu avaldisest (45), mille esitame kujul

$$\hat{\Theta}(k) = \left[\sum_{i=1}^{k}\varphi(i)\varphi^T(i)\right]^{-1}\left[\sum_{i=1}^{k}\varphi(i)y(i)\right] \tag{46}$$

Tähistades

$$P(k) = \left(\sum_{i=1}^{k}\varphi(i)\varphi^T(i)\right) \tag{47}$$

ja teisendades, saame

$$\hat{\Theta}(k) = P(k)\left[\sum_{i=1}^{k-1} \varphi(i)y(i) + \varphi(k)y(k)\right]$$

(48)

Arvestades (47) on $\mathbf{P^{-1}(k)}$ esitatav kujul

$$P^{-1}(k) = \sum_{i=1}^{k} \varphi(i)\varphi^T(i)$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} \varphi(i)\varphi^T(i) + \varphi(k)\varphi^T(k) \qquad (49)$$

Lähtudes (46) ja (47) saame

$$\hat{\Theta}(k-1) = P^{-1}(k-1)\left(\sum_{i=1}^{k-1} \varphi(i)y(i)\right),$$

millest järeldub

$$\sum_{i=1}^{k-1} \varphi(i)y(i) = P(k-1)\hat{\Theta}(k-1)$$

$$= \left[P^{-1}(k) - \varphi(k)\varphi(k)\right]\hat{\Theta}(k-1)\,. \qquad (50)$$

Ühendades (48) ja (50) saame vähimruutmeetodi rekurrentse arvutusskeemi kujul

$$\hat{\Theta}(k) = \hat{\Theta}(k-1) + K(k)\left[y(k) - \varphi(k)\hat{\Theta}(k-1)\right],$$

kus $\mathbf{K(k)=P(k)\varphi(k)}$.

Vähimruutmeetod on seega kasutav ka reaalajas dünaamiliste süsteemide parameetrite hindamiseks.

Esitame vähimruutmeetodi rekurrentse arvutusskeemi terviklikul kujul

$$\hat{\Theta}(k) = \hat{\Theta}(k-1) + K(k)\left[y(k) - \varphi(k)\hat{\Theta}(k-1)\right], \qquad (51)$$

$$P(k) = \frac{1}{\lambda}\left(P(k-1) - \frac{P(k-1)\varphi(k)\varphi^T(k)P(k-1)}{\lambda + \varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)}\right)$$

$$K(k)=P(k)\varphi(k),$$

kus $\mathbf{\varphi(k)}$ on andmevektor kujul (41),
$\mathbf{\theta(k)}$ ja $\mathbf{\theta(k-1)}$ on parameetrite vektorid kujul (41),
$\mathbf{P(k)}$ ja $\mathbf{P(k-1)}$ on $\mathbf{(n+m)*(n+m)}$ parameetrite hinnangute kovariatsioonimaatriksid,
$\mathbf{K(k)}$ on kaalukoefitsientide vektor,
λ on mälutegur $(\lambda<1)$.

Rekurrentse vähimruutmeetodi kasutamisel on probleemiks parameetrite algväärtustamine. Otstarbekas on valida algväärtused järgmiselt:

- $\hat{\Theta}(0) = 0$,
- $\mathbf{P(0) = \alpha I}$, kus $\alpha \gg 1$.

Vähimruuthinnangud koonduvad parajasti siis, kui on täidetud järgmised tingimused:

- polünoomide astmed **n** ja **m** ning hilistumine **d** on antud;
- $\mathbf{u(k)=U(k)-U_\infty}$ ja $\mathbf{y(k)=Y(k)-Y_\infty}$;
- **E{e(k)}=0** ja **e(k)** ei ole ole korreleeritud andmevektori elementidega s.t. **e(k)** väärtused on statistiliselt sõltumatud.

Järelikult esmaseks probleemiks on $\mathbf{U_\infty}$ ja $\mathbf{Y_\infty}$ väärtuste hindamine ja mudeli (37) modifitseerimine. Viimase esitame kujul

$$\mathbf{Y(k)=-a_1Y(k-1)-...-a_nY(k-n)+b_1U(k-d-1)+...+b_mU(k-d-m)+C},$$

kus $\mathbf{C=(1+a_1+...+a_n)Y_\infty - (b_1+...+b_m)U_\infty}$.

Sisuliselt on vaja laiendada andmevektorit $\boldsymbol{\varphi}\mathbf{(k)}$ lisades lõppu ühe elemendi väärtusega 1 ja samuti tuleb lisada parameetrite vektorile $\hat{\boldsymbol{\Theta}}\mathbf{(k-1)}$ lõppu üks element - parameeter **C** ning võib korraldada kõik arvutused sisendite ja väljundite reaalsete väärtustega.

Järgnevalt vaatleme juhitava süsteemi parameetrite hindamist juhul, kui süsteem kirjeldub stohhastilise mudeliga

$$\mathbf{A(z^{-1})y(k) = z^{-d}B(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})v(k)}, \qquad (52)$$

kus $\mathbf{A(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} +...+ a_nz^{-n}}$,
$\mathbf{B(z^{-1}) = b_1z^{-1} +...+ b_mz^{-m}}$,
$\mathbf{C(z^{-1}) = 1 + c_1z^{-1} +...+ c_nz^{-n}}$

ja **d** on hilistumine mõõdetuna diskreetimissammudes ning **v(k)** valge müra, matemaatilise ootusega null ja dispersiooniga $\boldsymbol{\sigma}^2$.

Vähimruutmeetod ei ole otseselt kasutatav, kuna **v(k)** on mittemõõdetav. Üheks võimaluseks on kasutada **v(k)** asemel väljundi prognoosi viga

$$\mathbf{e(k) = y(k) - \boldsymbol{\varphi}^T(k)\hat{\boldsymbol{\Theta}}(k-1)}$$

ja laiendada andmevektorit ja parameetrite vektorit järgmiselt

$$\boldsymbol{\varphi}^\mathbf{T}\mathbf{(k) = \left[-y(k-1),...,-y(k-n);u(k-d-1),...,u(k-d-m);e(k-1;...,u(k-n)\right]},$$

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}}^\mathbf{T}\mathbf{(k-1) = \left[a_1,...,a_n;b_1,...,b_m;c_1,...c_n\right]}. \qquad (53)$$

Nüüd võib kasutada polünoomide $\mathbf{A(z^{-1})}$, $\mathbf{B(z^{-1})}$ ja $\mathbf{C(z^{-1})}$ kordajate hindamiseks rekurrentset arvutusskeemi (51) ja vastavat meetodit nimetatakse **üldistatud vähimruutmeetodiks**.

Idendifitseerimisega adaptiivsüsteemid - kaudse ja otsese adaptiivjuhtimise skeemid

Identifitseerimisega adaptiivsüsteemi tööpõhimõtte selgitamiseks eeldame, et juhitav süsteem on antud kujul (1) ja **v(k)=0**

$$\mathbf{A(z)y(k)=B(z)u(k)},$$

suletud süsteemi käitumine on kirjeldatud etalonmudeliga kujul (3)

$$\mathbf{A_m(z)y_m(z)=B_m(z)w(k)}$$

ning lineaarne regulaator on antud kujul (2)

$$\mathbf{R(z)u(k)=T(z)w(k)-S(z)y(k)}.$$

Juhitava süsteemi mudeli kohta eeldame järgmist:

- polünoomid **A(z)** ja **B(z)** ei oma ühistegureid;
- polünoomide kordajad on konstantsed, kuid tundmatud;
- polünoomide astmed **(n, m)** on teada.

Identifitseerimisega adaptiivsüsteem võib olla realiseeritud kas kaudse või otsese adaptiivjuhtimise skeemide alusel. Kaudse adaptiivjuhtimise skeemi puhul hinnatakse juhitava süsteemi parameetreid ja viimaste hinnangute alusel arvutatakse regulaatori parameetrid. Otsese adaptiivjuhtimise skeemi rakendamisel hinnatakse regulaatori parameetreid, kasutades tagasisidestatud süsteemi omadusi.Sageli nimetatakse kaudse adaptiivjuhtimise skeemi ka ilmutatud algoritmiks (s.t. juhitava süsteemi mudelil põhinev adaptsiooniprotsess) ja otsese adaptiivjuhtimise skeemi ilmutamata algoritmiks, kuna juhitava süsteemi mudel ilmutatult adaptsiooniprotsessis ei esine.

Esiteks vaatleme kaudse adaptiivjuhtimise skeemil põhinevat identifitseerimisega adaptiivsüsteemi, mille algoritm koosneb järgmisest kolmest etapist:
1.etapp - polünoomide **A(z)** ja **B(z)** kordajate hindamine (näiteks rekurrentse vähimruutmeetodiga);
2.etapp - regulaatori arvutus s.t. lineaarse regulaatori juhul polünoomide **R(z)**, **S(z)** ja **T(z)** leidmine;
3.etapp - juhtsignaali **u(k**) arvutus ja rakendamine.

Eelnimetatud etapid täidetakse reaalajas korduvalt.

Teiseks vaatleme otsese adaptiivjuhtimise skeemil põhinevat identifitseerimisega adaptiivsüsteemide loomise võimalusi lineaarse regulaatori (2) baasil. Probleemi analüüsil lähtume avaldisest (8)

$$\mathbf{A(z)R'(z)+B^-(z)S(z)=A_0(z)A_m(z)},$$

millest saame

$$\begin{aligned}\mathbf{A_0(z)A_m(z)y(k)} &= \mathbf{A(z)R'(z)y(k)+B^-(z)S(z)y(k)},\\ &= \mathbf{A(z)R'(z)\frac{B(z)}{A(z)}u(k)+B^-(z)S(z)y(k)},\\ &= \mathbf{B^-(z)\left[R(z)u(k)+S(z)y(k)\right]}. \qquad (54)\end{aligned}$$

Avaldis (54) on vaadeldav süsteemi mudelina, mille parameetriteks on polünoomid $\mathbf{B^-(z)}$, **R(z)** ja **S(z)**. Antud mudel on üldiselt mittelineaarne, kuna parem pool on korrutatud polünoomiga $\mathbf{B^-(z)}$. Ainult erijuhtumil, kui $\mathbf{B^-(z)=b_0}$ on mudel lineaarne. See aga tähendab, et juhitav süsteem on minimaalfaasi süsteem ja peale selle on kõik nullid kiiresti sumbuvad, kuna nad taandatakse regulaatoriga välja.

Põhimõtteliselt on võimalik mudel (54) ümber parametriseerida järgnevalt:

$$\mathbf{A_0(z)A_m(z)y(k)=R^*(z)u(k)+S^*(z)y(k),} \tag{55}$$

kus $\mathbf{R^*(z)=B^-(z)\,R(z)}$ ja $\mathbf{S^*(z)=B^-(z)\,S(z)}$. Sellisel juhul aga $\mathbf{R^*(z)}$ ja $\mathbf{S^*(z)}$ sisaldavad ühistegurit (sisaldab aeglaselt sumbuvaid nulle), mis enne juhtsignaali arvutamist tuleb välja taandada, vältimaks mittestabiilsuse teket.

Otsesel adaptiivjuhtimise skeemil põhineva identifitseerimisega adaptiivsüsteemi algoritm on järgmine:

1.etapp - mudeli (54) kasutamisel (juhitav süsteem on minimaalfaasiline ja kiiresti sumbuvate nullidega) polünoomide **R(z)** ja **S(z)** kordajate hindamine;
- mudeli (55) kasutamisel polünoomide $\mathbf{R^*(z)}$ ja $\mathbf{S^*(z)}$ kordajate hindamine ning ühisteguri väljataandamine;

2.etapp - juhtsignaali **u(k)** arvutamine ja rakendamine.

Nimetatud etapid täidetakse reaalajas korduvalt.

Mitmemõõtmeliste lineaarsete süsteemide adaptiivjuhtimine

Identifitseerimisega adaptiivsüsteemi oluliseks ja süsteemi adaptiivseid omadusi tagavaks funktsionaalseks elemendiks on teatavasti adaptiivregulaator, mille ülesandeks on kaudse adaptiivjuhtimise skeemi kasutamisel juhitava süsteemi parameetrite hindamine, regulaatori parameetrite ja juhttoime arvutus ning rakendamine ja otsese adaptiivjuhtimise skeemi kasutamisel regulaatori parameetrite hindamine, juhttoime arvutus ja rakendamine. Praktilist tähtsust omavad ainult need vastuvõetava dünaamikaga adaptiivalgoritmid, mille arvutuste maht igal sammule ei ületa ajaliselt diskreetimise sammu. Sellega on põhjendatav polünomiaalsete diskreetaja sisend-väljund mudelite laialdane kasutamine adaptiivsüsteemide matemaatilisel kirjeldamisel, kuna nad võimaldavad lahendada põhimõtteliste erinevusteta adaptiivjuhtimise ülesandeid nii skalaarsete kui ka mitmemõõtmeliste lineaarsete süsteemide korral ning küllalt efektiivselt korraldada vajalikke arvutusi.

Adaptiivjuhtimise ülesannete lahendamisel eeldame tavaliselt, et skalaarne juhitav süsteem on antud diskreetaja sisend-väljund mudeliga kujul

$$\mathbf{A(z^{-1})y(k) = z^{-d}B(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})v(k)} \tag{56}$$

kus
$$\mathbf{A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + ... + a_n z^{-n}},$$
$$\mathbf{B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + ... + b_m z^{-m}},$$
$$\mathbf{C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + ... + c_n z^{-n}}$$

ja $\mathbf{d > 1}$ on hilistumine mõõdetuna diskreetimissammudes.

Mudel (56) esineb sageli ka modifitseeritud variandis - nimelt polünoomid $\mathbf{A(z^{-1})}$, $\mathbf{B(z^{-1})}$ ja $\mathbf{C(z^{-1})}$ on kõik **n** astme polünoomid, kordaja $\mathbf{b_0=0}$ ning $\mathbf{d > 0}$.

Mõlemal juhul sisaldab mudel hilistumist üks samm, kuna juhitavas süsteemis ei saa midagi põhimõtteliselt toimuda hetkeliselt. Kumba neist mudelitest eelistada on pigem traditsioonide küsimus kui sisuline probleem, erinevad koolkonnad on harjunud kasutama kas ühte või teist.

Mudeli (56) üldistuseks on maatriks-polünomiaalne mudel, mida kasutatakse mitmemõõtmeliste süsteemide kirjeldamisel, kujul

$$\mathbf{A(z^{-1})y(k) = z^{-d}B(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})v(k)}\,, \tag{57}$$

kus $\mathbf{A(z^{-1})}$, $\mathbf{B(z^{-1})}$ ja $\mathbf{C(z^{-1})}$ on maatrikspolünoomid

$$\mathbf{X(z^{-1}) = X_0 + X_1 z^{-1} + ... + X_n z^{-n}}\,. \tag{58}$$

ja $\mathbf{d} > \mathbf{1}$.

Avaldises (58) $\mathbf{X_i}$ $\mathbf{(i=0,1,...,n)}$ on $\mathbf{r*r}$ maatriksid. $\mathbf{A(z^{-1})}$ ja $\mathbf{C(z^{-1})}$ on $\mathbf{n}$ astme maatrikspolünoomid, kusjuures kordajad $\mathbf{A_0=C_0}$ on $\mathbf{r}$ järku ühikmaatriksid. $\mathbf{B(z^{-1})}$ on $\mathbf{m}$ astme maatrikspolünoom ja $\mathbf{B_0}$ on $\mathbf{r}$ järku ühikmaatriks.

Kasutusel on ka teine mudeli (57) modifikatsioon, mille puhul $\mathbf{A(z^{-1}), B(z^{-1})}$ ja $\mathbf{C(z^{-1})}$ on kõik $\mathbf{n}$ astme maatrikspolünoomid ning $\mathbf{B_0}$ on $\mathbf{r*r}$ nullmaatriks ja $\mathbf{d} > \mathbf{0}$.

Maatrikspolünomiaalsete mudelite puuduseks on see, et mudelis sisendite ja väljundite arvud on võrdsed. Reaalsetes juhitavates süsteemides on aga reeglina sisendeid rohkem kui väljundeid, mis on ka igati loogiline.

Mitmemõõtmeline determineeritud lineaarne regulaator on esitatav kujul

$$\mathbf{R(z^{-1})u(k) = T(z^{-1})w(k) - S(z^{-1})y(k)} \tag{59}$$

ja stohhastiline lineaarne regulaator kujul

$$\mathbf{R(z^{-1})u(k) = Q(z^{-1})\left[w(k) - y(k)\right] + P(z^{-1})v(k)} \tag{60}$$

kus $\mathbf{R(z^{-1})}$, $\mathbf{T(z^{-1})}$, $\mathbf{S(z^{-1})}$, $\mathbf{Q(z^{-1})}$ ja $\mathbf{P(z^{-1})}$ on $\mathbf{n\text{-}1}$ astme maatriks-polünoomid kujul (58).

Teoreetilise iseloomuga adaptiivjuhtimise ülesannete lahendamisel kasutatakse juhitava süsteemi mudelina diskreetaja olekumudelit kujul

$$\mathbf{x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)+Dv(k)}$$

$$\mathbf{y(k)=Cx(k)+Fv(k)}, \tag{61}$$

kus $\mathbf{x(k)}$ - $\mathbf{(n*1)}$ olekuvektor,
$\mathbf{u(k)}$ - $\mathbf{(r*1)}$ sisendvektor,
$\mathbf{y(k)}$ - $\mathbf{(m*1)}$ väljundvektor,
$\mathbf{v(k)}$ - $\mathbf{(r*1)}$ müravektor.

Vastav lineaarne regulaator on esitatav kujul

$$\mathbf{u(k)=K_x(k)x(k)+K_v(k)v(k)}, \tag{62}$$

kus **$K_x(k)$ - (r*n)** ja **$K_v(k)$ - (r*r)** tagasisidemaatriksid.

Arvestades seda, et mudelid (57) ja (61) on teatud täiendavatel tingimustel vastastikku teisendatavad, siis sõltuvalt lahendatavast probleemist on võimalik alati kasutada seda esitusvormi, mis on antud olukorras töötab paremini.

Kokkuvõtteks, adaptiivsüsteemide loomisel mitmemõõtmeliste süsteemide juhtimiseks ei ole lahendamatuid põhimõttelisi probleeme, küll aga on realiseeritavuse probleemid.

Probleemidest adaptiivsüsteemide realiseerimisel ja praktilisel kasutamisel

Käesoleval ajal, seonduvalt adaptiivsüsteemide realiseerimise ja praktilise kasutamisega, on kolm põhiprobleemi:

- aprioorse informatsiooni probleem;
- juhitava süsteemi modelleerimise probleem;
- uute realisatsioonimeetodite otsimine.

Aprioorse informatsiooni probleem on üks põhilisi probleeme adaptiivsüsteemide loomisel.
Selgitame aprioorse informatsiooni probleemi polünomiaalsete diskreetaja sisend-väljundmudelite baasil. Me eeldame, et juhitav süsteem kirjeldub adekvaatselt antud mudeliga, mille kohta on antud:
- polünoomide (või maatriks-polünoomide) $\mathbf{A(z^{-1})}$, $\mathbf{B(z^{-1})}$ ja $\mathbf{C(z^{-1})}$ astmed on vastavalt **n**, **m** ja **n**;
- hilistumine **d**, mõõdetuna diskreetimissammudes;
- kordaja $\mathbf{b_0}$ on teada või on teada ainult märk.

Praktika on tõestanud, et üldjuhul polünoomide astmetega võib eksida +1 võrra s.t. antud aste on ühe võrra suurem tegelikust astmest. Hilistumine peab üldiselt olema antud õigesti. Eelnimetatud aprioorne info on vajalik selleks, et oleks tagatud juhitava süsteemi või regulaatori parameetrite koondumine õigetele väärtustele.

Loomulik on püstitada aprioorse informatsiooni minimiseerimise ülesanne. Kas on põhimõtteliselt võimalik minimiseerida aprioorse informatsiooni hulka? Kui jah, siis mille arvel ja kuidas?

Klassikaline adaptiivsüsteem sisaldab 2 (üldjuhul vektoriaalset) tagasisidet: põhitagasiside (signaalitagasiside) oleku või väljundi järgi ja informatsiooniline tagasiside (parameetriline tagasiside), tagamaks adaptiivregulaatori parameetrite ümberhäälestamise lähtuvalt juhitava süsteemi parameetrite hinnangutest, ning eeldab aprioorse informatsiooni olemasolu eelpool esitatud mahus.

Aprioorse informatsiooni vähendamiseks või üldse kaotamiseks võib sisse viia teise informatsioonilise tagasiside (struktuurne tagasiside), millega realiseeritakse struktuursete parameetrite (olemuselt aprioorne info) adaptiivjuhtimine. Aprioorset infot on järelikult võimalik kaotada ainult adaptiivsüsteemi keerulisemaks muutmise arvel. Informatsiooniliste tagasisidede koordineerimiseks ja juhtimiseks viiakse tavaliselt sisse veel superviisorjuhtimise tase.

Juhitava süsteemi modelleerimise probleem. Paljude praktiliste süsteemide korral on võimalik piirduda lineaarsete mudelitega, kuna nad kirjeldavad reaalse süsteemi käitumist piisavalt täpselt. Seoses sellega, et juhitavad süsteemid muutuvad järjest keerulisemaks ja kasvavad ka juhtimissüsteemidele esitatavad täpsuse nõuded ning samaaegselt kasvavad arvutusvõimsused, on tekkinud vajadus ja ka võimalus kasutada mittelineaarseid, aga samuti ka empiirilisi mudeleid. Eriti tuleks esile tõsta empiiriliste mudelite efektiivse rakendamise võimalust tehisintellekti meetodite kasutamisega, mis aitavad kompenseerida modelleerimise keerukuse kasvu. Hägusal loogikal ja närvivõrkudel baseeruvate meetodite kasutamine juhitavate süsteemide modelleerimisel, aga samuti ka süsteemide realiseerimisel, annab insenerile uued võimalused, aga tekitab ka uusi probleeme. Iseõppivate algoritmide kasutamisel süsteemide modelleerimisel on probleeme sellega, et sageli ei ole võimalik öelda, kui kaua see iseõppimine aega võtab ja millal intelligentne empiiriline mudel kirjeldab süsteemi käitumist piisava täpsusega.

Adaptiivsüsteemide realiseerimise probleemid. Arvestades esitatut on selge, et üldjuhul on adaptiivsüsteem keerukas hierarhilise struktuuriga süsteem, mis põhiliselt realiseeritakse tarkvaraliselt, rakendades reaalaja süsteemide tarkvaratehnikat. Probleemiks adaptiivsüsteemide loomisel on rahuldava dünaamikaga adaptsiooniprotsesside projekteerimine ja piisava töökindlusega realisatsiooni väljatöötamine. Adaptiivsüsteemide projekteerimisel ja realiseerimisel rakendatakse laialdaselt prototüüpimist, mille puhul täiuslik prototüüp on vaadeldav reaalse süsteemina.

Prototüüpimine kui põhiline adaptiivsüsteemide analüüsi, projekteerimise ja realiseerimise meetod

Adaptiivjuhtimise alases teadustöös, aga samuti adaptiivsüsteemide projekteerimise ja realiseerimise praktikas, kasutatakse laialdaselt tarkvaralist prototüüpimist, kus adaptiivregulaator realiseeritakse arvutil ja reaalne juhitav süsteem ühendatakse arvutiga vastavate liidestega või simuleeritakse juhitavat süsteemi. Arendades prototüüpi seni, kuni kõik süsteemile esitatud nõuded on rahuldatud. See prototüüp ongi põhimõtteliselt kasutatav reaalse adaptiivregulaatorina. Järgnevalt vaatleme, milliste probleemidega tuleb põhimõtteliselt kokku puutuda ja milliseid otsustusi tuleb teha adaptiivsüsteemide loomisel, piirdudes identifitseerimisega adaptiivsüsteemide näitega. Me tõlgendame prototüüpimist veidi üldisemalt kui tavaliselt. Prototüüpimine sisaldab nii algoritmilise baasi arendamist kui ka tarkvaralist realisatsiooni.

Identifitseerimisega adaptiivsüsteemi prototüüpimine on iteratiivne protsess ja sisaldab järgmised olulised etapid, mida täidetakse korduvalt vastavalt jooksvalt kujunevale olukorrale, kuni jõutakse kõiki nõudeid rahuldava realisatsioonini:

1. etapp - juhitava süsteemi spetsifitseerimine;
2. etapp - juhitava süsteemi modelleerimine;
3. etapp - mudeli analüüs ja otsustused;
4. etapp - juhtimisülesande püstitamine ja korrigeerimine;
5. etapp - adaptiivsüsteemi struktuurskeemi valik;
6. etapp - parameetrite ja/või olekute hindamise meetodi/algoritmi valik;
7. etapp - regulaatori tüübi valik ja struktuuri määramine;
8. etapp - adaptiivsüsteemi katsetamine algoritmilisel tasemel ja eksperimentaalselt valitavate parameetrite sobivate väärtuste või väärtuste piirkondade leidmine;
9. etapp - tulemuste analüüs ja järeldused;
10. etapp - adaptiivsüsteemi realiseerimisega seonduvate kitsenduste sissetoomine;
11. etapp - adaptiivsüsteemi katsetamine realisatsiooni tasemel;
12. etapp - tulemuste analüüs ja järeldused;
13. etapp - projekti vormistamine.