ISS0022 AUTOMAATJUHTIMISSÜSTEEMID JÄTKUKURSUS

ÜLEVAADE ADAPTIIVSÜSTEEMIDEST

1. ADAPTIIVSÜSTEEMIDEST

Esmalt püüame selgitada, millist juhtimissüsteemi on sisuliselt põhjust nimetada adaptiivseks. Mis on adaptiivsüsteemil ühist fikseeritud parameetritega juhtimissüsteemiga, mis teda eristab ja millistest olulistest funktsionaalsetest plokkidest koosneb üks tavaline adaptiivsüsteem? Järgnevalt vaatleme, kuidas on kombeks klassifitseerida adaptiivsüsteeme teooria seisukohalt ja millist klassifikatsiooni on harjutud kasutama inseneripraktikas.

Millist juhtimissüsteemi nimetame adaptiivseks?

Vastamaks püstitatud küsimusele, vaatleme adaptiivset juhtimissüsteemi (edaspidi adaptiivsüsteem) kui fikseeritud parameetritega tagasisidestatud juhtimissüsteemi üldistust.

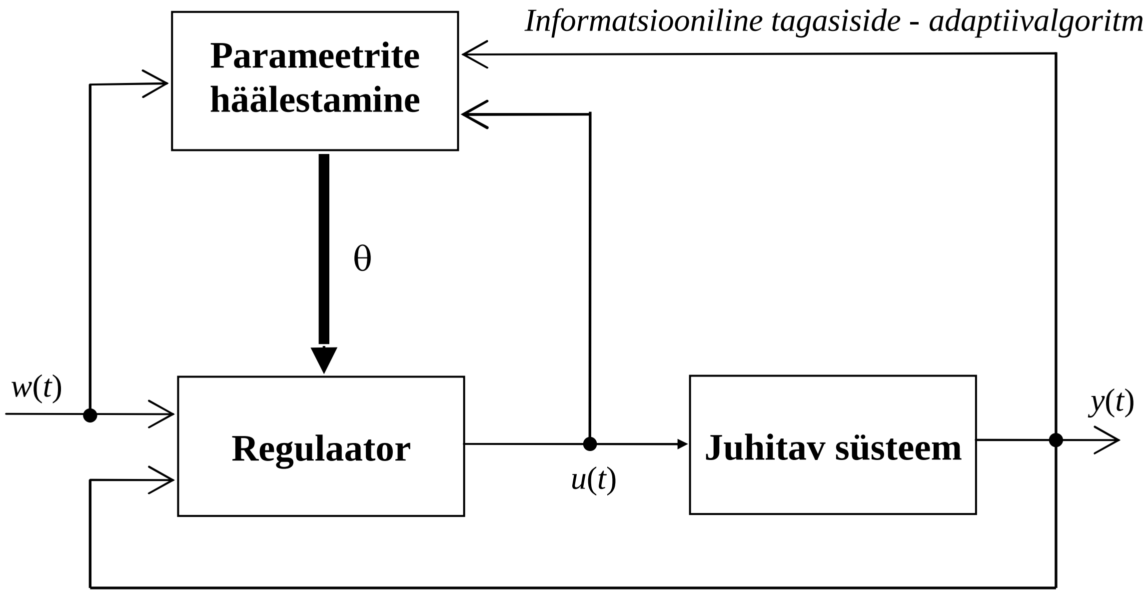
Adaptiivsüsteem on tagasisidestatud juhtimissüsteem, mis lisaks põhitagasisidele sisaldab veel vähemalt ühte informatsioonilist tagasisidet, tagamaks regulaatori parameetrite isehäälestumist juhitava süsteemi parameetrite või välismõjude muutumisel.

Adaptiivsüsteemi (struktuurskeem on esitatud joonisel 1.1) eristab fikseeritud parameetritega juhtimissüsteemist informatsioonilise tagasiside või tagasisidede olemasolu, mille abil realiseeritakse adaptiivjuhtimise algoritm ja tagatakse süsteemi isehäälestumine s.t. adaptiivsed omadused.

Vastavalt struktuurskeemile, koosneb adaptiivsüsteem adaptiivregulaatorist ja juhitavast süsteemist. Adaptiivregulaator, mille abil realiseeritakse adaptiivjuhtimise algoritm (edaspidi adaptiivalgoritm), sisaldab primaarregulaatorit ja adaptiivalgoritmi realiseerivaid funktsionaalseid plokke.

Täiusliku iseõppiva adaptiivsüsteemi heaks näiteks on inimene, tema võime kohanduda ümbritseva keskkonna tingimustele kõige üldisemas mõttes.

Meie uurimisobjektiks on adaptiivsüsteemide sünteesi probleemid tagamaks nõutava dünaamikaga adaptsiooniprotsesse aga samuti tervikliku juhtimissüsteemi stabiilsust.



Joonis 1.1 Adaptiivsüsteemi struktuurskeem

Adaptiivsüsteemid - klassifitseerimine teooria ja praktika vaatepunktist

Teoreetiliselt klassifitseeritakse adaptiivsüsteeme lähtudes kasutatavast adaptiivjuhtimise skeemist, kusjuures eristatakse kaudse ja otsese adaptiivjuhtimise skeeme sõltuvalt sellest, kas adaptiivalgoritm töötab juhitava süsteemi mudeli alusel või mitte.

Otsese adaptiivjuhtimise korral regulaatori adaptiivalgoritm ei sisalda juhitava süsteemi mudelit, vaid hinnatakse otseselt regulaatori parameetreid.

Kaudse adaptiivjuhtimise korral regulaatori adaptiivalgoritm baseerub juhitava süsteemi mudelil, millest lähtudes arvutatakse regulaatori häälestused.

Praktikas on kasutusel etalonmudeliga adaptiivsüsteemid ja identifitseerimisega adaptiivsüsteemid. Etalonmudeliga adaptiivsüsteem (struktuurskeem on esitatud joonisel 1.2) on otsese adaptiivjuhtimise näiteks. Identifitseerimisega adaptiivsüsteem (struktuurskeem on esitatud joonisel 1.3) aga töötab tavaliselt kaudse adaptiivjuhtimise skeemi kohaselt, kuid põhimõtteliselt võib olla realiseeritud ka otsese skeemi alusel. Viimasel ajal on etalonmudeliga adaptiivsüsteeme hakatud nimetama ka mudelit järgivateks süsteemideks.

Juhitava süsteemi mudelid

Viimasel ajal on saamas halvaks tavaks piirduda automaatjuhtimise valdakonnas diskreetaja mudelitega ja niinimetatud arvutikeskse lähenemisega kõiges ja kõikjal. Praktikale orienteerumine on muidugi igati põhjendatud. Kõige halvem selle nähtuse juures on aga see, et paljud reaalsed süsteemid oma füüsikaliselt olemuselt on pidevaja süsteemid. Loobudes uuringutest pidevaja valdkonnas, peame me olema absoluutselt kindlad, et kasutatav mudel kirjeldab juhitava süsteemi käitumist adekvaatselt meie juhtimisülesande seisukohalt ja on olemas isegi piisav täpsuse varu. Vastasel juhul projekteeritud juhtimissüsteem käitub reaalse süsteemiga teisiti kui meie arvutused seda näitasid.

Otstarbekamaks ja ka vähemohtlikumaks tuleb pidada tasakaalustatud lähenemist lahendatavale juhtimisülesandele. Nimelt, kui juhitav süsteem on oma füüsikaliselt sisult pidevaja süsteem, siis modelleerides leiame me pidevaja mudeli, millest lähtudes projekteerime juhtimissüsteemi. Olles leidnud kõiki nõudeid rahuldava lahenduse, siis läheme üle viimase realiseerimiseks diskreetaja mudelitele, valides sobivalt diskreetimissammu.
Kui juhitava süsteemi kohta on kasutada tõesti ainult diskreetaja mudel, siis tuleb piirduda juhtimisülesande lahendamisega diskreetajas.

Adaptiivsüsteemide sünteesil me tavaliselt eeldame, et juhitav süsteem on pidev skalaarne n-järku lineaarne statsionaarne süsteem, mis on antud pidev- või diskreetaja ülekandefunktsiooniga aga samuti võib olla esitatud kas pidev- või diskreetaja olekumudeliga alljärgnevalt:

- **pidevaja mudelid**:

• ülekandefunktsioon

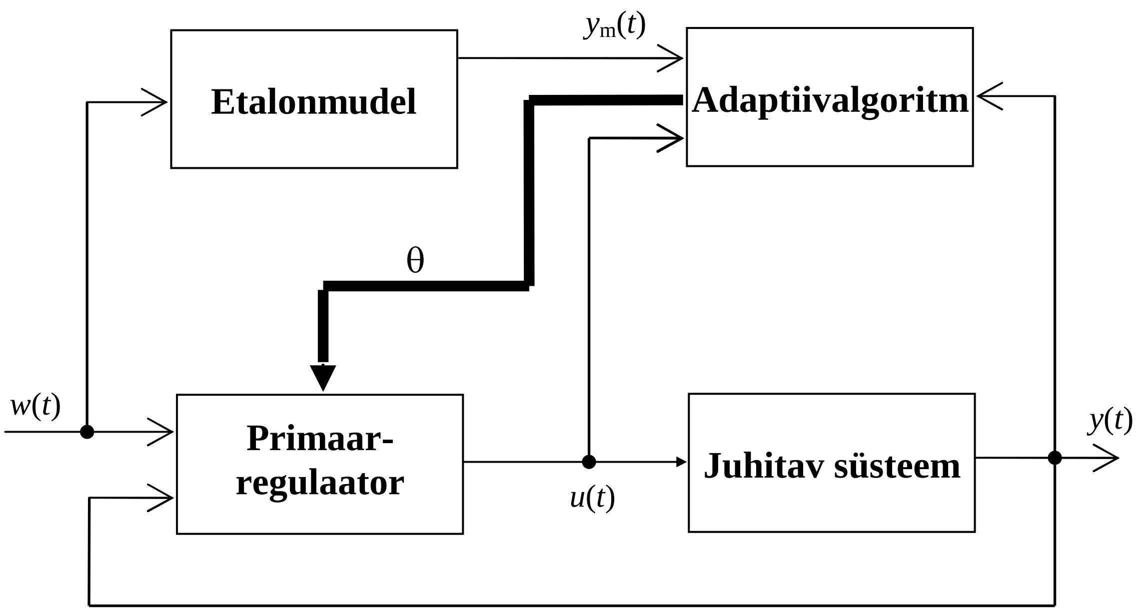
$$\mathbf{W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{B(s)}{A(s)}},$$

$$\mathbf{A(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_{n-1} s + a_n}$$

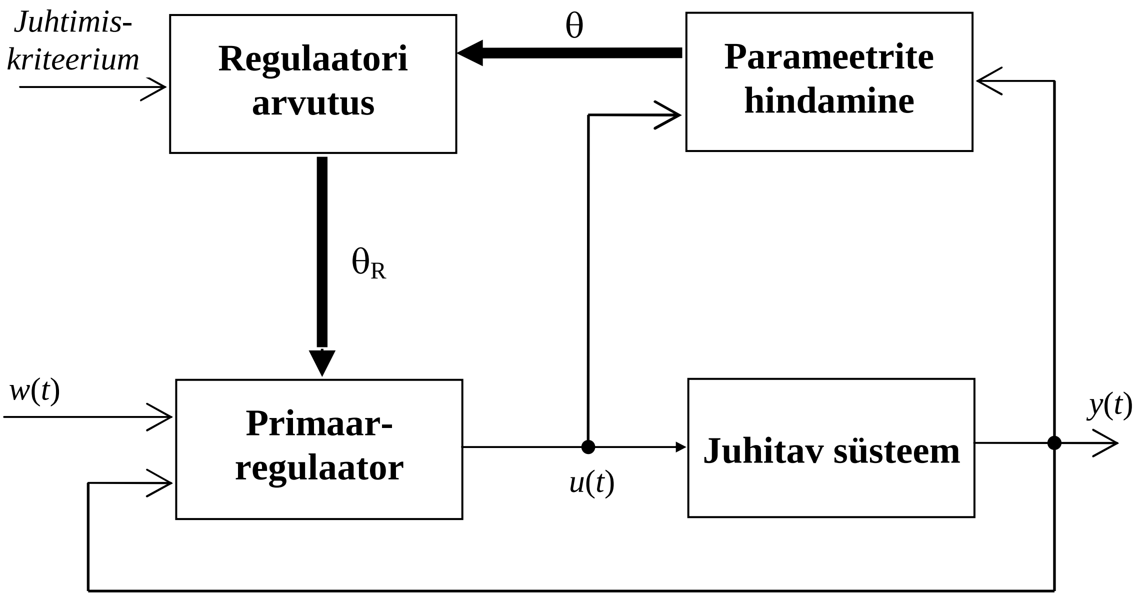
• olekumudel

$$\mathbf{x(t) = Ax(t) + Bu(t)}$$

$$\mathbf{y(t) = Cx(t)}$$



Joonis 1.2 Etalonmudeliga adaptiivsüsteem



Joonis 1.3 Identifitseerimisega adaptiivsüsteem

$$\mathbf{B(s) = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + ... + b_{m-1} s + b_m}$$

- **diskreetaja mudelid**:

• ülekandefunktsioon

$$\mathbf{W(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}},$$

$$\mathbf{A(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_n}$$
$$\mathbf{B(z) = b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + ... + b_{m-1} z + b_m}$$

• olekumudel

$$\mathbf{x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)}$$

$$\mathbf{y(k) = Cx(k)}$$

kus **u(·), y(·)** ja **x(·)** on vastavalt sisend, väljund ning olek (**n*1** vektor).

2. STABIILSUS

Dünaamiliste süsteemide kvantitatiivsel analüüsil esmaseks probleemiks on nende süsteemide käitumise matemaatiline kirjeldamine, mida nimetame lihtsalt süsteemi modelleerimiseks. Muidugi modelleerimise juures on see oht, et me ei suuda arvestada kõiki välismõjusid süsteemile või jälle mudeli lihtsustamisel taandame midagi olulist välja. Tulemuseks on see, reaalsed süsteemid kipuvad sageli käituma teisiti kui me modelleerimisega oskame ette näha. Kuna aga tehissüsteemide projekteerimine baseerub juhitavate süsteemide mudelitel, siis ei ole sageli need süsteemid võimelised oma funktsioone nõutud täpsusega täitma. Stabiilsuse kontseptsioon, mis esmakordselt võeti kasutusele mehaanikas, annab võimaluse selliste olukordade kindlaks tegemiseks ja arvestamiseks juba süsteemide projekteerimise käigus ning üldjuhul kvalitatiivseteks otsustusteks - süsteem on stabiilne või siis, et süsteem on mittestabiilne. Käesolevas alajaotuses lähtume stabiilsuse mõiste esitamisel Ljapunovi stabiilsuse teooriast.

Ljapunovi stabiilsus

Olgu analüüsitav mittelineaarne süsteem antud kujul

$$\mathbf{\dot{x}_i(t) = f_i\left[x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t), t\right]}, \qquad \mathbf{i=1, 2, ..., n}$$

või ekvivalentse vektor-diferentsiaalvõrrandi kujul

$$\mathbf{\dot{x}(t) = f\left[x(t), t\right]}, \tag{2.1}$$

kus **x** ja **f** on veeruvektorid ja eeldame, et $\mathbf{f[0,t]=0}$ kui $\mathbf{t > t}$ ning $\mathbf{x(t_0)=x_0}$ on algolek ja lahend $\mathbf{x(t;x_0,t_0)}$ eksisteerib kõikide $\mathbf{t > t_0}$ puhul. Kuna $\mathbf{f(0,t)=0}$, siis järelikult $\mathbf{x=0}$ on tasakaaluolek.

Ljapunovi järgi stabiilsuse defineerimisel on põhimõtteliselt 2 võimalust - kas rääkida vabaliikumise või tasakaaluoleku stabiilsusest ning automaatjuhtimise teoorias on kasutusel mõlemad. Tasakaaluolek on sisuliselt nulline vabaliikumine.

<u>Definitsioon 2.1</u> Mittelineaarse süsteemi (2.1) **tasakaaluolek** $\mathbf{x=0}$ **on** (Ljapunovi järgi) **stabiilne** parajasti siis, kui iga $\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$ ja $\mathbf{t_0 > 0}$ puhul leidub selline $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{t_0}) > \mathbf{0}$, et kui $|\mathbf{x_0}| < \boldsymbol{\delta}$, siis $|\mathbf{x(t;x_0,t_0)}| < \boldsymbol{\varepsilon}$ kõikide $\mathbf{t \geq t_0}$.

Definitsioon 2.2 Mittelineaarse süsteemi (2.1) **tasakaaluolek** $\mathbf{x=0}$ **on** (Ljapunovi järgi) **ligitõmbav** parajasti siis, kui mõne $\rho > \mathbf{0}$ ja iga η ning $\mathbf{t_0 > 0}$ puhul, leidub selline ajaintervall $\mathbf{T(\eta,x_0,t_0)}$, et kui $|\mathbf{x_0}| < \rho$ siis $|\mathbf{x(t;x_0,t_0)}| < \eta$ kõikide $\mathbf{t > t_0 + T}$ korral.

Definitsioon 2.3 Mittelineaarse süsteemi (2.1) **tasakaaluolek** $\mathbf{x=0}$ **on** (Ljapunovi järgi) **asümptootiliselt stabiilne** parajasti siis, kui $\mathbf{x=0}$ on stabiilne ja ligitõmbav.

Kui definitsioonis 2.1 δ ei sõltu alghetkest $\mathbf{t_0}$, siis räägitakse sageli ka tasakaaluoleku **ühtlasest stabiilsusest** ning vastavalt ka **ühtlasest asümptootilisest stabiilsusest**. Kui esitatud definitsioonides $\delta(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to\infty}{=} \infty$, siis öeldakse, et tasakaaluolek on globaalselt stabiilne või suurelt stabiilne.

Mida sisuliselt tähendavad need erinevad tasakaaluoleku stabiilsuse definitsioonid?
Tasakaaluolek on **stabiilne** (definitsioon 2.1) tähendab, et mittelineaarse süsteemi lahend $\mathbf{x(t;\ x_0,\ t_0)}$ on tasakaaluoleku läheduses või mitte kaugel sellest.
Asümptootiline stabiilsus (definitsioon 2.3) tähendab seda, et lahend läheneb tasakaaluolekule, kui $\mathbf{t\to\infty}$. **Ühtlane asümptootiline stabiilsus** tähendab aga seda, et lahendi suundumine tasakaalu-olekusse toimub lõpliku aja vältel.

Järgnevalt püüame selgitada tasakaaluoleku ja vabaliikumise stabiilsuse omavahelist seost. Olgu $\mathbf{x'(t;x'_0,t_0)}$ mittelineaarse süsteemi (2.1) lahend ja meid huvitab selle lahendi stabiilsus (sisuliselt vabaliikumise stabiilsus). Stabiilsuse määramiseks me häiritame algtingimust $\mathbf{x_0=x'_0+\delta x}$ ja uurime vastava lahendi $\mathbf{x(t;\ x_0,\ t_0)}$ kõrvalekaldumist lahendist $\mathbf{x'(t;\ x'_0,\ t_0)}$. Kuna on tegemist sama süsteemi lahenditega, siis saame

$$\dot{\mathbf{x}}'(\mathbf{t}) = \mathbf{f}\left[\mathbf{x}'(\mathbf{t}),\mathbf{t}\right], \qquad \mathbf{x}'(\mathbf{t_0}) = \mathbf{x}'_0,$$
$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{f}\left[\mathbf{x}(\mathbf{t}),\mathbf{t}\right], \qquad \mathbf{x}(\mathbf{t_0}) = \mathbf{x_0} = \mathbf{x}'_0 + \delta\mathbf{x_0}.$$

Kui tähistada $\mathbf{e(t)=x(t)-x'(t)}$, siis $\mathbf{e(t)}$ rahuldab diferentsiaalvõrrandit

$$\mathbf{e(t_0)= \delta x_0}.$$

$$\dot{\mathbf{e}}(\mathbf{t}) = \mathbf{f}\left[\mathbf{e}(\mathbf{t}),\mathbf{t}\right] = \mathbf{f}\left[\mathbf{x}'(\mathbf{t})+\mathbf{e}(\mathbf{t}),\mathbf{t}\right] - \mathbf{f}\left[\mathbf{x}'(\mathbf{t}),\mathbf{t}\right], \qquad \mathbf{e}(\mathbf{t_0}) = \delta\mathbf{x_0} \tag{2.2}$$

Kuna $\mathbf{f[0,t]=0}$, siis lahend $\mathbf{e(t)=0}$ vastab diferentsiaalvõrrandi (2.2) tasakaaluolekule. See aga tähendab seda, et diferentsiaalvõrrandi (2.1) lahendi (vabaliikumise) stabiilsuse probleem on teisendatav diferentsiaalvõrrandi (2.2) tasakaaluoleku stabiilsuse probleemiks.

Ljapunovi teine meetod

Ljapunovi teine meetod võimaldab määrata ilma süsteemi vastavat lahendit leidmata, kas mittelineaarse süsteemi (2.1) tasakaaluolek on stabiilne. Meetod põhineb teatud omadustega skalaarse funktsiooni $\mathbf{V(x,t)}$ konstrueerimisel ja selle aja järgi tuletise $\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x},\mathbf{t})$ analüüsil süsteemi lahenditel.

Teoreem 2.1 Mittelineaarse mitteautonoomse süsteemi (2.1) tasakaaluolek on ühtlaselt asümptootiliselt stabiilne suure signaali mõttes parajasti siis, kui eksisteerib selline skalaarne funktsioon $\mathbf{V(x,t)}$ pidevate osatuletistega $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{t}$ suhtes, et $\mathbf{V(0,\ t)=0}$ ja on täidetud järgmised tingimused:

(**A**) **V(x,t)** on positiivselt määratud, s.t. eksisteerib selline pidev mittekahanev skalaarne funktsioon a, et **a(0)=0** ja $\mathbf{V(x,t) \geq a(|x|) > 0}$ kõikide **t** ja $\mathbf{x \neq 0}$ puhul;

(**B**) **V(x,t)** on tõkestatud ülalt, s.t. eksisteerib selline pidev mittekahanev skalaarne funktsioon **b**, et **b(0)=0** ja $\mathbf{V(x,t) \leq b(|x|)}$ kõikide **t** puhul;

(**C**) $\mathbf{\dot{V}(x,t)}$ on negatiivselt määratud;

(**D**) **V(x,t)** on radiaalselt tõkestamata funktsioon, s.t. $\mathbf{a(|x|) \to \infty}$ kui $\mathbf{|x| \to \infty}$.

<u>Märkused:</u>

1. Kui $\mathbf{\dot{V}(x,t)}$ on negatiivselt poolmääratud ja täidetud ainult tingimus (**A**), siis on tasakaaluolek stabiilne.
2. Kui $\mathbf{\dot{V}(x,t)}$ on negatiivselt poolmääratud ja täidetud tingimused (**A**) ning (**B**), siis on tasakaaluolek ühtlaselt stabiilne.

Kui mittelineaarse süsteemi (2.1) võrrandis **f** ei sõltu ilmutatult **t**-st, siis on tegemist autonoomse süsteemiga.
Autonoomsete süsteemide stabiilsus ei sõltu alghetkest $\mathbf{t_0}$ ja sellepärast on tegemist ainult ühtlase stabiilsuse või ühtlaselt asümptootilise stabiilsusega.

<u>**Teoreem 2.2**</u> Mittelineaarse autonoomse süsteemi

$$\mathbf{\dot{x}(t) = f[x(t)], \quad f[0] = 0} \tag{2.3}$$

tasakaaluolek on ühtlaselt asümptootiliselt stabiilne (suure signaali mõttes) parajasti siis, kui eksisteerib selline skalaarne funktsioon **V(x)** pidevate osatuletistega **x** ja **t** suhtes, et **V(0)=0** ja on täidetud järgmised tingimused:

(**A**) $\mathbf{V(x) > 0}$, kui $\mathbf{x \neq 0}$ s.t. on positiivselt määratud;
(**B**) $\mathbf{\dot{V}(x) < 0}$, kui $\mathbf{x \neq 0}$ s.t. on negatiivselt määratud;
(**C**) $\mathbf{V(x) > 0}$, kui $\mathbf{|x| \to \infty}$.

Praktikas on tunduvalt lihtsam konstrueerida Ljapunovi funktsiooni **V(x,t)** negatiivselt poolmääratud tuletisega kui negatiivselt määratud tuletisega. Adaptiivsüsteemide sünteesil ei ole Ljapunovi funktsiooni tuletise negatiivse määratuse tingimus kunagi täidetud. Ei saa kontrueerida Ljapunovi funktsiooni, mille avaldis sisaldab tundmatute parameetrite veavektoreid ja tagada sealjuures tuletise negatiivne määratus.

<u>**Teoreem 2.3**</u> Lineaarse statsionaarse süsteemi

$$\mathbf{\dot{x}(t) = Ax(t)} \tag{2.4}$$

tasakaaluolek **x=0** on asümptootiliselt stabiilne parajasti siis, kui iga antud sümmeetrilise positiivselt määratud maatriksi **Q** puhul eksisteerib sümmeetriline positiivselt määratud maatriks **P**, mis on maatriksvõrrandi

$$\mathbf{AP + PA = -Q} \tag{2.5}$$

üheseks lahendiks. Siinjuures lineaarse statsionaarse süsteemi (2.4) Ljapunovi funktsioon on esitatav kujul

$$\mathbf{V(x) = x^T(t)Px(t)}. \tag{2.6}$$

Positiivsed reaalfunktsioonid ja Kalman-Jakubovits'i lemma

Positiivsed reaalfunktsioonid ja maatriksid omavad suurt tähtsust stabiilsuse teoorias ja samuti seonduvalt adaptiivsüsteemide stabiilsuse probleemidega, eriti stabiilsuse tõestustes. Positiivsete reaalfunktsioonide ja maatriksite omadusi on uuritud siduteoorias seonduvalt sidude sünteesiga.

Definitsioon 2.4: Ratsionaalne funktsioon **F(s)** kompleksmuutujast $\mathbf{s = \sigma + j\omega}$ on positiivne reaalfunktsioon (PR) parajasti siis, kui ta rahuldab järgmisi tingimusi:

(**A**) Kui argument s on reaalarv, siis **F(s)** on reaalarv;
(**B**) $\mathbf{Re[F(s)] \geq 0}$ kui $\mathbf{Re[s] > 0}$.

Definitsioon 2.5: Ratsionaalne funktsioon **F(s)** on PR parajasti siis, kui ta rahuldab järgmisi tingimusi:

(**A**) **F(s)** on reaalarv, kui argument s on reaalarv;
(**B**) **F(s)** on analüütiline funktsioon piirkonnas $\mathbf{Re[s] > 0}$ ja puhtimaginaarsed poolused on lihtsad (mittekordsed) ning vastavad resiidid mittenegatiivsed;
(**C**) $\mathbf{Re[F(s)] \geq 0}$ iga reaalarvulise ω puhul, kui $\mathbf{j\omega}$ ei ole $\mathbf{F(j\omega)}$ poolus.

Definitsioon 2.6: Ratsionaalne funktsioon **F(s)** on rangelt positiivne reaalfunktsioon (SPR) parajasti siis, kui $\mathbf{F(s - \varepsilon)}$ on PR mõne $\mathbf{\varepsilon > 0}$ korral.

Definitsioon 2.7: Ratsionaalne funktsioon **F(s)** on SPR parajasti siis, kui ta rahuldab järgmisi tingimusi:

(**A**) **F(s)** on analüütiline funktsioon piirkonnas $\mathbf{Re[s] \geq 0}$ ja $\mathbf{Re[F(j\omega)] > 0}$, kui $\mathbf{\omega \in (-\infty, \infty)}$;

(**B**) **F(s)** on analüütiline funktsioon piirkonnas $\mathbf{Re[s] \geq 0}$ ja $\mathbf{Re[F(j\omega)] \geq \delta > 0}$, kui $\mathbf{\omega \in (-\infty, \infty)}$.

Mõningad olulised PR ja SPR funktsioonide omadused:

1. Kui **F(s)** on PR (SPR), siis $\mathbf{\dfrac{1}{F(s)}}$ on samuti PR (SPR).

2. Kui $\mathbf{F_1(s)}$ ja $\mathbf{F_2(s)}$ on PR (SPR), siis lineaarkombinatsioon $\mathbf{\alpha F_1(s) + \beta F_2(s)}$ on samuti PR (SPR) kõigi $\mathbf{\alpha, \beta > 0}$ korral.

3. Kui $\mathbf{F_1(s)}$ on otseside ja $\mathbf{F_2(s)}$ on tagasiside ülekandefunktsioonid ja nad on PR (SPR), siis negatiivse tagasiside korral süsteemi ülekandefunktsioon on samuti PR (SPR).

Kalman-Jakubovits'i lemma: Olgu antud asümptootiliselt stabiilne, täielikult juhitav ja jälgitav skalaarne lineaarne statsionaarne süsteem

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{B}\mathbf{u}(\mathbf{t}) \\ \mathbf{y}(\mathbf{t}) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(\mathbf{t}),\end{aligned} \tag{2.7}$$

kus **A** on **n*n**, **B** on **n*1** ja **C** on **1*n** maatriksid. Süsteemi (2.7) ülekandefunktsioon

$$\mathbf{W}(\mathbf{s}) = \mathbf{C}(\mathbf{s}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

on rangelt positiivne reaalfunktsioon **(**SPR**)**. Sellisel juhul iga antud sümmeetrilise positiivselt määratud maatriksi **Q** puhul eksisteerib sümmeetriline positiivselt määratud maatriks **P**, mis rahuldab võrrandeid

$$\begin{aligned}&\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q}, \\ &\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} = \mathbf{C}.\end{aligned}$$

3. ETALONMUDELIGA ADAPTIIVSÜSTEEMIDE SÜNTEES – LJAPUNOVI MEETOD

Tulenevalt stabiilsuse probleemidest tundlikkuse meetodil sünteesitud adaptiivsüsteemides on välja töötatud stabiilsuse meetodid Ljapunovi stabiilsuse teooria ja hüperstabiilsuse teooria baasil stabiilsete adaptiivsüsteemide loomiseks. Meetodeid iseloomustab see, et adaptiivregulaatori parameetrite häälestusalgoritmide analüütilise konstrueerimise skeem sisaldab adaptiivsüsteemi stabiilsuse nõuet. Teisiti, adaptiivregulaatori häälestusalgoritmid konstrueeritakse analüütiliselt lähtudes adaptiivsüsteemi stabiilsuse nõudest. Meie vaatleme ainult Ljapunovi stabiilsuse teoorial põhinevat stabiilsete adaptiivsüsteemide sünteesi meetodit ja nimetame seda edaspidi lihtsalt Ljapunovi meetodiks.

Sünteesitava adaptiivsüsteemi stabiilsuse tagamiseks kasutame hästituntud **Ljapunovi teist meetodit**, mille kohaselt mittelineaarne süsteem omab asümptootiliselt stabiilset tasakaaluolekut **x=o**, kui õnnestub konstrueerida järgmiste omadustega Ljapunovi funktsioon **V(x,t)**:

- $\mathbf{V(x,t) > 0}$, kui $\mathbf{x \neq 0}$ $\mathbf{V(x,t)}$ on positiivselt määratud;
- $\mathbf{\dot{V}(x,t) < 0}$, kui $\mathbf{x \neq 0}$ $\mathbf{\dot{V}(x,t)}$ on negatiivselt määratud;
- $\mathbf{V(x,t) \to \infty}$, kui $|\mathbf{x}| \to \infty$;
- $\mathbf{V(x,t) = 0}$, kui **x=0**.

Järelikult asümptootiline stabiilsus on tagatud ainult nende süsteemi signaalide ja parameetrite suhtes, mille puhul **V(x,t)** on negatiivselt määratud. Kui **V(x,t)** on negatiivselt poolmääratud, siis on tasakaaluolek **x=0** ainult stabiilne.

Kasutades Ljapunovi meetodit etalonmudeliga adaptiivsüsteemide sünteesil, lülitatakse süsteemi stabiilsuse nõue adaptiivregulaatori parameetrite häälestusalgoritmide analüütilise konstrueerimise skeemi järgmiselt:

Esimeseks etapiks on **veavõrrandi koostamine**, mis skalaarsel juhul on diferentsiaalvõrrand ja üldjuhul diferentsiaalvõrrandite süsteem ning on esitatav kujul

$$\mathbf{\dot{e}(t) = f_e[e(t)] + g_e[p(t)]},$$

kus $\mathbf{f_e}$ on lineaarne funktsioon süsteemi väljundi või oleku veavektorist **e(t)** ning sisaldab etalonmudelit (olekuvõrrandi maatriksid või ülekandefunktsioon), $\mathbf{g_e}$ on mittelineaarne funktsioon regulaatori parameetrite veavektorist **p(t)**.

Veavektor **e(t)** on defineeritud kas väljundi veavektorina kujul

$$\mathbf{e(t) = y(t) - y_m(t)}$$

või oleku veavektorina kujul

$$\mathbf{e(t) = x(t) - x_m(t)}\ ),$$

kus **y(t)** on suletud süsteemi väljundvektor ja $\mathbf{y_m(t)}$ etalonmudeli väljunvektor ning **x(t)** ja $\mathbf{x_m(t)}$ vastavad olekuvektorid.

Teiseks etapiks on **Ljapunovi funktsiooni moodustamine**, mis skalaarsel juhul on positiivselt määratud ruutfunktsioon ja üldjuhul positiivselt määratud ruutvorm ning on esitatav kujul

$$\mathbf{V(e,p) = f_e[e(t)] + g_e[p(t)]},$$

kus $\mathbf{f_e}$ on ruutvorm veavektorist **e(t)** ja $\mathbf{g}_e$ on ruutvorm regulaatori parameetrite veavektorist **p(t)**. Ljapunovi meetodi kasutamisel ongi põhiprobleemiks sobivate omadustega Ljapunovi funktsiooni leidmine ja see määrab ka meetodi rakendatavuse piirid.

Kolmandaks etapiks on **Ljapunovi funktsioonist V(e,p) tuletise arvutamine** aja järgi veavõrrandiga (3.6) määratud trajektooril ja see on esitatav üldjuhul kujul

$$\mathbf{\dot{V}(e,p) = \dot{f}_e[e(t)] + \dot{g}_e[p(t),\dot{p}(t)]},$$

kus $\mathbf{\dot{f}_e[e(t)] < 0}$ on negatiivselt määratud ja $\mathbf{\dot{g}_e[p(t),\dot{p}(t)]}$ on funktsioon veavektorist **p(t)** ja tema tuletisest $\mathbf{\dot{p}(t)}$. Tavaliselt $\mathbf{\dot{g}_e[p(t),\dot{p}(t)] = 0.}$ Sellest võrrandist leitakse regulaatori parameetrite häälestusalgoritmid, millest otseselt järeldub, et süsteemi tasakaaluolek **e(t)=0** on asümptootiliselt stabiilne, kuid tasakaaluolek **p(t)=**0 on ainult stabiilne. Kui signaalivektor on vastavalt häiritatud, siis tasakaaluolek **p(t)=0** on samuti asümptootiliselt stabiilne.

Neljandaks etapiks on **adaptiivregulaatori häälestusalgoritmide formeerimine** ja vajadusel ka modifitseerimine. Häälestusalgoritmid on esitatavad kujul

$$\mathbf{\dot{p}(t) = -Ge(t)s^T(t)},$$

kus **p(t)** on parameetrite vektor, **G** on võimendustegurite maatriks (pidevaja adaptiivsüsteemides tavaliselt diagonaalmaatriks) ja **s(t)** signaalivektor. Signaalivektori sisuks võivad olla ka filtreeritud signaalid.

Et adaptiivsüsteemides veavektori ja signaalivektori konponendid on proportsionaalses sõltuvuses seadesuuruse amplituudist, siis sageli realiseerimiseks see häälestusalgoritm normaliseeritakse piiramaks suurte **e(t)** ja **s(t)** puhul adaptsioonikiirust

$$\mathbf{\dot{p}(t) = -G\frac{e(t)s^T(t)}{1 + s^T(t)s(t)}}.$$

Praktikas, sõltuvalt olukorra eripärast on kasutusel mitmed häälestusalgoritmide modifikatsioonid.

Kokkuvõttes Ljapunovi meetodil põhinev adaptiivsüteemide sünteesi skeem oleks järgmine, eeldusel, et on antud juhitav süsteem ja etalonmudel:

1.etapp - primaar-regulaatori tüübi valik ja struktuuri määramine;
2.etapp - veavõrrandi formeerimine;
3.etapp - Ljapunovi funktsiooni moodustamine;
4.etapp - Ljapunovi funktsiooni tuletise arvutamine aja järgi veavõrrandiga määratud trajektooril ja stabiilsuse analüüs;
5.etapp - adaptiivregulaatori häälestusalgoritmide formeerimine ja vajadusel modifitseerimine, arvestamaks konkreetse realisatsiooni spetsiifikat.

Esimest järku lineaarse süsteemi identifitseerimine

Eeldame, et identifitseeritav skalaarne esimest järku lineaarne süsteem on kirjeldatav olekuvõrrandiga

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{ax}(\mathbf{t}) + \mathbf{bu}(\mathbf{t})\,, \tag{3.1}$$

kus parameetrid **a** ja **b** konstantsed, kuid tundmatud. Samuti eeldame, et süsteem on asümptootiliselt stabiilne **a<0** ning skalaarne sisend **u(t)** ja olek **x(t)** (langeb kokku väljundiga) on tõkestatud signaalid.

Süsteemi (3.1) parameetrite hindamiseks moodustame hindaja kujul

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(\mathbf{t})\mathbf{a}_{\mathbf{m}}\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) + [\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{t}) - \mathbf{a}_{\mathbf{m}}]\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{t})\mathbf{u}(\mathbf{t}) \qquad \mathbf{a}_{\mathbf{m}}<\mathbf{0}. \tag{3.2}$$

Eesmärk on häälestada parameetrid $\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{t})$ ja $\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{t})$ nii, et

$$\lim_{t\to\infty}\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{t}) = \mathbf{a} \quad \text{ja} \quad \lim_{t\to\infty}\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{t}) = \mathbf{b}$$

ja sealjuures kõik signaalid sünteesitavas adaptiivsüsteemis jääks tõkestatuteks.

Defineerime oleku ja parameetrite vead adaptiivsüsteemis alljärgnevalt

$$\mathbf{e}(\mathbf{t}) = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) - \mathbf{x}(\mathbf{t})\,, \qquad \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{t}) = \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{t}) - \mathbf{a} \qquad \text{ja} \qquad \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{t}) = \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{t}) - \mathbf{b}\,.$$

Süsteemi (3.1) identifitseerimiseks ettenähtud adaptiivsüsteemi sünteesiks Ljapunovi meetodil moodustame veamudeli (sisuliselt on tegemist vea käitumist määrava diferentsiaalvõrrandiga) kujul

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}(\mathbf{t}) &= \dot{\hat{\mathbf{x}}}(\mathbf{t}) - \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t})\,,\\ &= \mathbf{a}_{\mathbf{m}}\mathbf{e}(\mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{t})\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{t})\mathbf{u}(\mathbf{t})\,.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Süsteemi identifitseerimiseks ettenähtud adaptiivsüsteemi parameetrite häälestusalgoritmide leidmiseks moodustame Ljapunovi funktsiooni kujul

$$\mathbf{V}(\mathbf{e},\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left[\mathbf{e}^2(\mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{a}}^2(\mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{b}}^2(\mathbf{t})\right]. \tag{3.4}$$

V(e,a,b) on ruutfunktsioon oleku ja parameetrite vigadest ning on positiivselt määratud.

Vastavalt sünteesiprotseduurile, leiame järgnevalt Ljapunovi funktsiooni tuletise aja järgi

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{e},\tilde{\mathbf{a}},\tilde{\mathbf{b}}) = \mathbf{e}(\mathbf{t})\dot{\mathbf{e}}(\mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{t})\dot{\tilde{\mathbf{a}}}(\mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{t})\dot{\tilde{\mathbf{b}}}(\mathbf{t})\,. \tag{3.5}$$

ja arvestades veavõrrandit (3.3), saame

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{e},\tilde{\mathbf{a}},\tilde{\mathbf{b}}) &= \mathbf{e}(\mathbf{t})\left[\mathbf{a}_{\mathbf{m}}\mathbf{e}(\mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{t})\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{t})\mathbf{u}(\mathbf{t})\right] + \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{t})\dot{\tilde{\mathbf{a}}}(\mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{t})\dot{\tilde{\mathbf{b}}}(\mathbf{t})\\ &= \mathbf{a}_{\mathbf{m}}\mathbf{e}^2(\mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{t})\left[\dot{\tilde{\mathbf{a}}}(\mathbf{t}) + \mathbf{e}(\mathbf{t})\mathbf{x}(\mathbf{t})\right] + \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{t})\left[\dot{\tilde{\mathbf{b}}}(\mathbf{t}) + \mathbf{e}(\mathbf{t})\mathbf{u}(\mathbf{t})\right].\end{aligned}$$

Analüüsides saadud avaldist selgub, et on mõistlik valida parameetrite häälestamise adaptiivalgoritmid kujul (kuna kandilistes sulgudes olevad avaldised muutuvad nulliks ja Ljapunovi funktsiooni tuletis on negatiivselt poolmääratud)

$$\dot{\tilde{\mathbf{a}}}(\mathbf{t}) = -\mathbf{e}(\mathbf{t})\mathbf{x}(\mathbf{t}) \quad \text{ja} \quad \dot{\tilde{\mathbf{b}}}(\mathbf{t}) = -\mathbf{e}(\mathbf{t})\mathbf{u}(\mathbf{t})\,. \tag{3.6}$$

Sellisel juhul avaldisest (3.5) saame

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{e},\tilde{\mathbf{a}},\tilde{\mathbf{b}}) = \mathbf{a_m e^2(t)} \le \mathbf{0}\,. \tag{3.7}$$

Järelikult tasakaaluolek $\mathbf{e(t)} = \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{t}) = \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{t}) = \mathbf{0}$ on stabiilne.

Parameetrite **a** ja **b** konstantsuse tõttu võib vastavad häälestusalgoritmid esitada ka kujul

$$\dot{\hat{\mathbf{a}}}(\mathbf{t}) = -\mathbf{e}(\mathbf{t})\mathbf{x}(\mathbf{t}) \quad \text{ja} \quad \dot{\hat{\mathbf{b}}}(\mathbf{t}) = -\mathbf{e}(\mathbf{t})\mathbf{u}(\mathbf{t})\,, \tag{3.8}$$

mille alusel on võimalik realiseerida identifitseerimise adaptiivsüsteem. Vastavalt, stabiilseks tasakaaluolekuks osutub $\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{t}) = \mathbf{a}, \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{t}) = \mathbf{b}$ ja $\mathbf{e(t)} = \mathbf{0}$.

Ljapunovi funktsioon (3.4) võib olla valitud ka kujul

$$\mathbf{V}(\mathbf{e},\tilde{\mathbf{a}},\tilde{\mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left[\mathbf{e^2(t)} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{g_1}}\mathbf{a^2(t)} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{g_2}}\mathbf{b^2(t)}\right], \tag{3.10}$$

kus $\mathbf{g_1}$ ja $\mathbf{g_2}$ on positiivsed konstandid (nimetatakse võimendusteguriteks) ning parameetrite häälestusalgoritmid (3.8) omandavad kuju

$$\dot{\hat{\mathbf{a}}}(\mathbf{t}) = -\mathbf{g_1 e(t)x(t)} \quad \text{ja} \quad \dot{\hat{\mathbf{b}}}(\mathbf{t}) = -\mathbf{g_2 e(t)u(t)} \tag{3.11}$$

Esimest järku lineaarse süsteemi identifitseemise adaptiivsüsteemi struktuurskeem on esitatud joonisel 3.1, mille käitumine on kirjeldatav oleku $\mathbf{x(t)}$ ja parameetrite $\mathbf{a}$ ning $\mathbf{b}$ veavõrranditega

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{e}}(\mathbf{t}) &= \mathbf{a_m e(t)} + \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{t})\mathbf{x(t)} + \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{t})\mathbf{u(t)}\,,\\
\dot{\tilde{\mathbf{a}}}(\mathbf{t}) &= -\mathbf{e(t)x(t)}\,,\\
\dot{\tilde{\mathbf{b}}}(\mathbf{t}) &= -\mathbf{e(t)u(t)}\,.
\end{aligned}$$

Esimest järku lineaarse süsteemi juhtimine

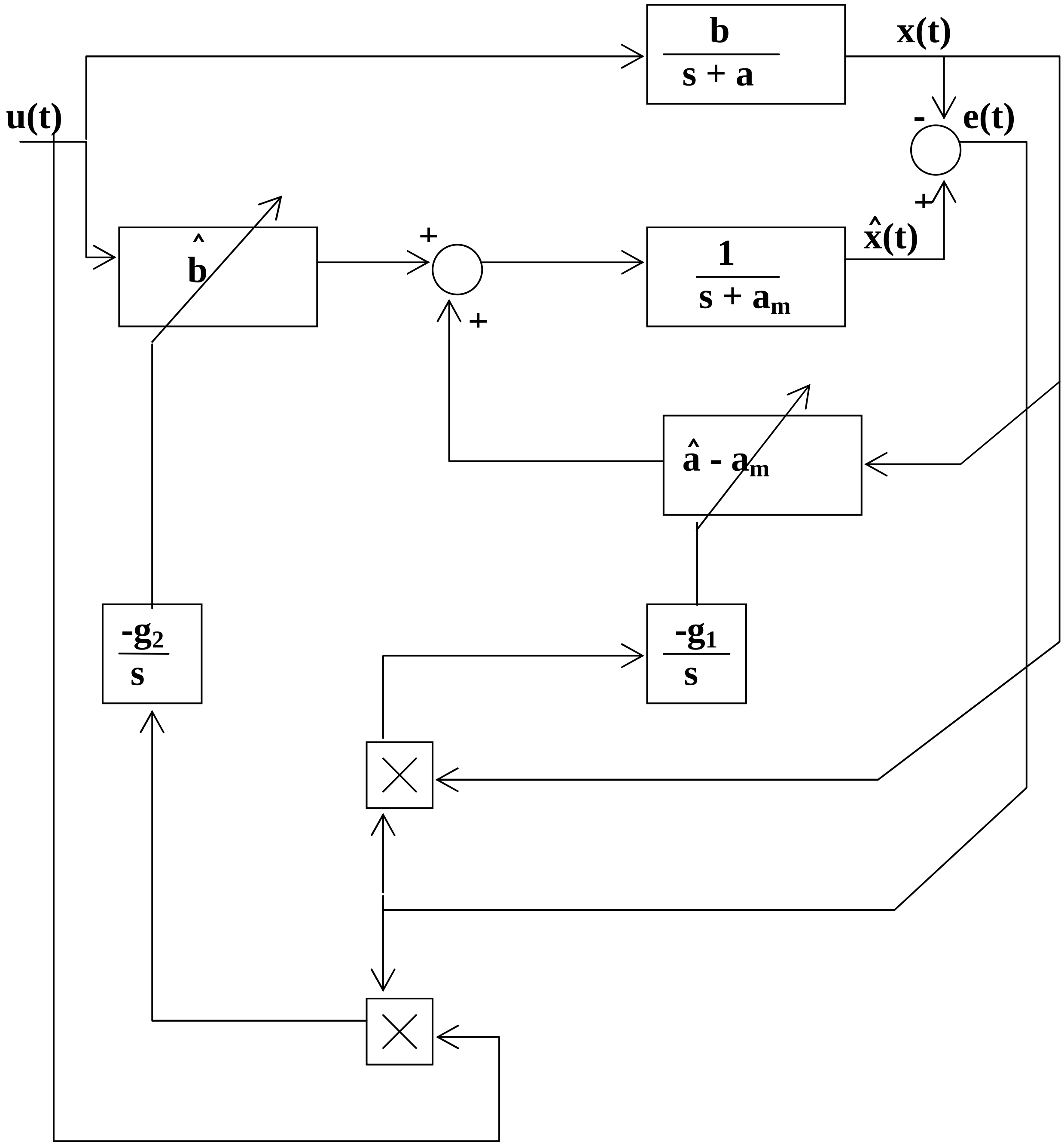
Juhitav skalaarne lineaarne süsteem on antud olekuvõrrandiga

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{ax(t)} + \mathbf{bu(t)}\,. \tag{3.12}$$

Parameetrid **a** ja **b** on konstantsed, kuid tundmatud.

Etalonmudel on antud kujul

$$\dot{\mathbf{x}}_\mathbf{m}(\mathbf{t}) = \mathbf{a_m x_m(t)} + \mathbf{b_m w(t)}\,, \quad \mathbf{a_m<0.} \tag{3.13}$$



Joonis 3.1 Etalonmudeliga adaptiivsüsteem
esimest järku lineaarse süsteemi identifitseerimiseks

Arvestades, et juhitava süsteemi parameetrid on tundmatud ja praktilist tähtsust omavad ainult tagasisidestatud süsteemid, valime häälestatava regulaatori võrrandi alljärgnevalt

$$\mathbf{u(t) = -k(t)x(t) + k_0(t)w(t)}\,. \tag{3.14}$$

Arvestades juhitava süsteemi ja regulaatori võrrandeid, saame suletud süsteemi olekuvõrrandi kujul

$$\begin{aligned}\mathbf{\dot{x}(t)} &= \mathbf{ax(t) + \left[-k(t)x(t) + k_0(t)w(t)\right]} \\ &= \mathbf{\left[a - bk(t)\right]x(t) + bk_0(t)w(t)}\,.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Defineerides signaalide ja parameetrite vead sünteesitavas adaptiivsüsteemis alljärgnevalt

$$\mathbf{e(t) = x(t) - x_m(t)}\,, \quad \mathbf{\tilde{k}(t) = k(t) - k}\,, \quad \mathbf{\tilde{k}_0(t) = k_0(t) - k_0}\,, \tag{3.16}$$

kus regulaatori parameetrid $\mathbf{k = \frac{a - a_m}{b}}$ ja $\mathbf{k_0 = \frac{b_m}{b}}$ vastavad tasakaaluolekule. Suletud süsteem käitub täpselt nii nagu etalonmudel.

Arvestades eelnevat saame veavõrrandi kujul

$$\mathbf{\dot{e}(t) = a_m e(t) - b\tilde{k}(t)x(t) + b\tilde{k}_0(t)w(t)}\,. \tag{3.17}$$

Järgnevalt vaatleme eraldi kahte varianti, kuna iga lihtsustus omab suurt praktilist tähtsust süsteemi realiseerimise aspektist.

Esiteks vaatleme juhtumit, kus juhitava süsteemi parameeter **b** on teada. Järelikult lihtsustuvad häälestatava regulaatori võrrand (3.14) ja süsteemi veavõrrand (3.17) ning on esitatavad alljärgnevalt:

$$\begin{aligned}&\mathbf{u(t) = -k(t)x(t) + k_0 w(t)}\,, \\ &\mathbf{\dot{e}(t) = ae(t) + b\tilde{k}(t)x(t)}\,.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Ljapunovi funktsiooni valime kujul

$$\mathbf{V(e,k) = \frac{1}{2}\left[e^2(t) + \tilde{k}^2(t)\right]}.$$

Leiame Ljapunovi funktsiooni tuletise

$$\mathbf{\dot{V}(e,\tilde{k}) = e(t)\dot{e}(t) + \tilde{k}(t)\dot{\tilde{k}}(t)} \tag{3.19}$$

ja arvestades veavõrrandit (3.18), saame

$$\begin{aligned}\mathbf{\dot{V}(e,\tilde{k})} &= \mathbf{e(t)\left[a_m e(t) - b\tilde{k}(t)x(t)\right] + \tilde{k}(t)\dot{\tilde{k}}(t)}\,, \\ &= \mathbf{a_m e^2(t) + \tilde{k}(t)\left[\dot{\tilde{k}}(t) - be(t)x(t)\right]}.\end{aligned}$$

Regulaatori häälestusalgoritmi valik kujul

$$\mathbf{\dot{\tilde{k}}(t) = be(t)x(t)} \tag{3.20}$$

tagab Ljapunovi funktsiooni tuletise negatiivse poolmääratuse

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{e},\tilde{\mathbf{k}}) = \mathbf{a}_m \mathbf{e}^2(\mathbf{t}) \le \mathbf{0}$$

ja adaptiivsüsteemi stabiilsuse.
Tasakaaluolekuks on $\mathbf{e}(\mathbf{t}) = \tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{t}) = \mathbf{0}$.
Parameetri k konstantsuse tõttu võib häälestusalgoritmi (5.20) esitada kujul

$$\dot{\mathbf{k}}(\mathbf{t}) = \mathbf{b}\mathbf{e}(\mathbf{t})\mathbf{x}(\mathbf{t}), \tag{3.21}$$

millest lähtudes on võimalik realiseerida adaptiivsüsteem.

Teiseks vaatleme juhtumit, kus juhitava süsteemi parameetri **b** märk on teada.
Lähtume häälestatava regulaatori võrrandist (5.14) ja veavõrrandist (5.17) ning valime Ljapunovi funktsiooni kujul

$$\mathbf{V}(\mathbf{e},\tilde{\mathbf{k}},\tilde{\mathbf{k}}_0) = \frac{1}{2}\left[\mathbf{e}^2(\mathbf{t}) + |\mathbf{b}|(\tilde{\mathbf{k}}^2(\mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{k}}_0{}^2(\mathbf{t}))\right]. \tag{3.22}$$

Arvutades Ljapunovi funktsiooni tuletise

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{e},\tilde{\mathbf{k}},\tilde{\mathbf{k}}_0) = \mathbf{e}(\mathbf{t})\dot{\mathbf{e}}(\mathbf{t}) + |\mathbf{b}|\left[\tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{t})\dot{\tilde{\mathbf{k}}}(\mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{k}}_0(\mathbf{t})\dot{\tilde{\mathbf{k}}}_0(\mathbf{t})\right]$$

ja arvestades veavõrrandit (3.17), saame

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{e},\tilde{\mathbf{k}},\tilde{\mathbf{k}}_0) &= \mathbf{e}(\mathbf{t})\left[\mathbf{a}_m\mathbf{e}(\mathbf{t}) + \mathbf{b}\tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{t})\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{b}\tilde{\mathbf{k}}_0(\mathbf{t})\mathbf{w}(\mathbf{t})\right] + |\mathbf{b}|\left[\tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{t})\dot{\tilde{\mathbf{k}}}(\mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{k}}_0(\mathbf{t})\dot{\tilde{\mathbf{k}}}(\mathbf{t})\right] = \\ &= \mathbf{a}_m(\mathbf{t}) + |\mathbf{b}|\left\{\tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{t})\left[\mathbf{sign}(\mathbf{b})\mathbf{e}(\mathbf{t})\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \dot{\tilde{\mathbf{k}}}(\mathbf{t})\right] + \tilde{\mathbf{k}}_0(\mathbf{t})\left[\mathbf{sign}(\mathbf{b})\mathbf{e}(\mathbf{t})\mathbf{w}(\mathbf{t}) + \dot{\tilde{\mathbf{k}}}_0(\mathbf{t})\right]\right\}\end{aligned}$$

Valides regulaatori (5.14) häälestusalgoritmid kujul

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{k}}}(\mathbf{t}) &= -\mathbf{sign}(\mathbf{b})\mathbf{e}(\mathbf{t})\mathbf{x}(\mathbf{t}) \\ \dot{\tilde{\mathbf{k}}}_0(\mathbf{t}) &= -\mathbf{sign}(\mathbf{b})\mathbf{e}(\mathbf{t})\mathbf{w}(\mathbf{t})\end{aligned} \tag{3.23}$$

tagame Ljapunovi funktsiooni tuletise negatiivse poolmääratuse

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{e},\tilde{\mathbf{k}},\tilde{\mathbf{k}}_0) = \mathbf{a}_m\mathbf{e}^2(\mathbf{t}) \le \mathbf{0}$$

ja sellega sünteesitava adaptiivsüsteemi stabiilsuse.
Tasakaaluolekuks on $\mathbf{e}(\mathbf{t}) = \tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{t}) = \tilde{\mathbf{k}}_0(\mathbf{t}) = \mathbf{0}$.

Adaptiivsüsteemi realiseermiseks tuleb regulaatori häälestusalgoritmid esitada kujul

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{k}}(\mathbf{t}) &= -\mathbf{sign}(\mathbf{b})\mathbf{e}(\mathbf{t})\mathbf{x}(\mathbf{t}), \\ \dot{\mathbf{k}}_0(\mathbf{t}) &= -\mathbf{sign}(\mathbf{b})\mathbf{e}(\mathbf{t})\mathbf{w}(\mathbf{t}).\end{aligned} \tag{3.24}$$

Vastavaks tasakaaluolekuks on **e(t)=0, k(t)=k** ja **$\mathbf{k_o(t)=k_o}$**.

Esimest järku lineaarse süsteemi juhtimiseks sünteesitud adaptiivsüsteemi struktuurskeem on esitatud joonisel 3.2.

Lineaarsete süsteemide identifitseermine

Olgu **n** järku lineaarne statsionaarne süsteem kirjeldatud olekuvõrrandiga

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{Ax}(\mathbf{t}) + \mathbf{Bu}(\mathbf{t}) \qquad (3.25)$$

kus **A** ja **B** on tundmatud maatriksid, vastavalt dimensioonidega **n*n** ja **n*r**. Eeldame, et süsteem (3.25) on asümptootiliselt stabiilne ja sisendsignaalid (sisendvektori **u(t)** kõik koordinaadid) on tõkestatud.

Süsteemi (3.25) parameetrite hindamiseks moodustame hindaja kujul

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A_m}\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) + \left[\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{t}) - \mathbf{A_m}\right]\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{t})\mathbf{u}(\mathbf{t}), \qquad (3.26)$$

kus $\mathbf{A_m}$ on asümptootiliselt stabiilne **n*n** maatriks. Maatriksid $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{t})$ ja $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{t})$ kujutavad endast identifitseeritava süsteemi maatriksite **A** ning **B** hinnanguid. Defineerime identifitseeritava süsteemi oleku veavektori kujul

$$\mathbf{e}(\mathbf{t}) = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) - \mathbf{x}(\mathbf{t})$$

ja süsteemi maatriksite **A** ja **B** veamaatriksid kujul

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{t}) = \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{t}) - \mathbf{A}, \qquad \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{t}) = \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{t}) - \mathbf{B}.$$

ning moodustame veavõrrandi kujul

$$\dot{\mathbf{e}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A_m}\mathbf{e}(\mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{t})\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{t})\mathbf{u}(\mathbf{t}). \qquad (3.27)$$

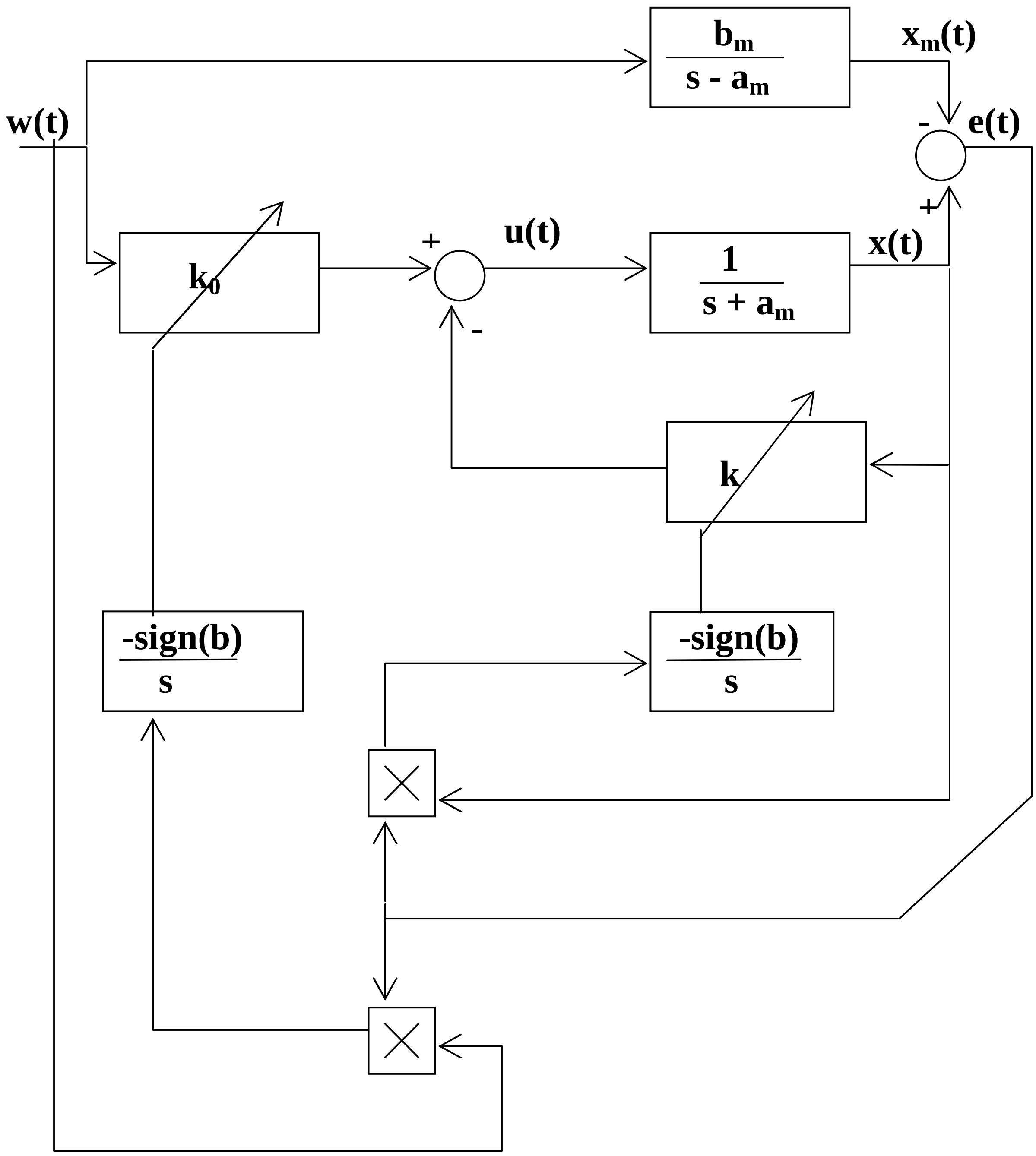
Süsteemi identifitseerimiseks ettenähtud adaptiivsüsteemi parameetrite häälestusalgoritmide leidmiseks valime Ljapunovi funktsiooni kujul

$$\mathbf{V}(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}) = \mathbf{e}^{\mathbf{T}}(\mathbf{t})\mathbf{Pe}(\mathbf{t}) + \mathbf{Tr}\left\{\tilde{\mathbf{A}}^{\mathbf{T}}(\mathbf{t})\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{t}) + \dot{\tilde{\mathbf{B}}}(\mathbf{t})\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{t})\right\}, \qquad (3.28)$$

kus **P** on **n*n**-positiivselt määratud maatriks. $\mathbf{V}(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}})$ on ruutvorm oleku veavektorist ja süsteemi veamaatriksitest ning on positiivselt määratud.

Leiame Ljapunovi funktsioonist tuletise ja ühtlasi arvestades veavõrrandit (3.27), saame

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}) &= \dot{\mathbf{e}}^{\mathbf{T}}(\mathbf{t})\mathbf{Pe}(\mathbf{t}) + \mathbf{e}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}\dot{\mathbf{e}}(\mathbf{t}) + \mathbf{Tr}\left\{2\tilde{\mathbf{A}}^{\mathbf{T}}(\mathbf{t})\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{t}) + 2\tilde{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}}(\mathbf{t})\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{t})\right\} \\ &= \mathbf{e}^{\mathbf{T}}(\mathbf{t})((\mathbf{A_m})^{\mathbf{T}}\mathbf{P} + \mathbf{PA_m})\mathbf{e}(\mathbf{t}) + 2\left[\mathbf{e}^{\mathbf{T}}(\mathbf{t})\mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{t})\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{Tr}\left\{\dot{\tilde{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}(\mathbf{t})\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{t})\right\}\right] + \\ &\quad + 2\left[\mathbf{e}^{\mathbf{T}}(\mathbf{t})\mathbf{P}\dot{\tilde{\mathbf{B}}}(\mathbf{t})\mathbf{u}(\mathbf{t}) + \mathbf{Tr}\left\{\dot{\tilde{\mathbf{B}}}^{\mathbf{T}}(\mathbf{t})\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{t})\right\}\right] \qquad (3.29)\end{aligned}$$



Joonis 3.2 Etalonmudeliga adaptiivsüsteem
esimest järku lineaarse süsteemi juhtimiseks

$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{e},\tilde{\mathbf{A}},\tilde{\mathbf{B}})$ avaldises muutuvad kandilistes sulgudes olevad liikmed nulliks parajasti siis, kui valida häälestusalgoritmid järgmiselt

$$\dot{\tilde{\mathbf{A}}}(\mathbf{t}) = -\mathbf{Pe}(\mathbf{t})\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(\mathbf{t}),$$
$$\dot{\tilde{\mathbf{B}}}(\mathbf{t}) = -\mathbf{Pe}(\mathbf{t})\mathbf{u}^{\mathrm{T}}(\mathbf{t}), \qquad (3.30)$$

sest teatavasti $\mathbf{Tr\{ab^T\}=b^Ta}$, kus **a** ja **b** on veeruvektorid.

Vastavalt Malkini teoreemile, kui $\mathbf{A_m}$ on asümptootiliselt stabiilne **n*n** maatriks ja **Q** on suvaline sümmeetriline positiivselt määratud **n*n** maatriks, siis maatriksvõrrandi

$$(\mathbf{A_m})^{\mathrm{T}}\mathbf{P} + \mathbf{PA_m} = -\mathbf{Q}$$

lahendiks on sümmetriline positiivselt määratud **n*n** maatriks **P**.

Järeldub, et $\mathbf{V}(\mathbf{e},\tilde{\mathbf{A}},\tilde{\mathbf{B}})$ on negatiivselt poolmääratud

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{e},\tilde{\mathbf{A}},\tilde{\mathbf{B}}) = -\mathbf{e}(\mathbf{t})\mathbf{Qe}(\mathbf{t}) \le \mathbf{0}$$

ja tasakaalupunkt $\mathbf{e}(\mathbf{t}) = \mathbf{0},\ \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{t}) = \mathbf{0},\ \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{t}) = \mathbf{0}$ on stabiilne.

Adaptiivsüsteemi realiseerimiseks tuleb häälestusalgoritmid (3.30) esitada kujul

$$\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{t}) = -\mathbf{Pe}(\mathbf{t})\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(\mathbf{t}),$$
$$\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{t}) = -\mathbf{Pe}(\mathbf{t})\mathbf{u}^{\mathrm{T}}(\mathbf{t}).$$

Stabiilseks tasakaaluolekuks on **e(t)=0, A(t)=A ja B(t)=B**.

Lineaarsete süsteemide juhtimine

Olgu **n** järku lineaarne statsionaarne süsteem antud olekuvõrrandiga

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{Ax}(\mathbf{t}) + \mathbf{Bu}(\mathbf{t}), \qquad (3.31)$$

kus **A** ja **B** on konstantsed, aga tundmatud maatriksid, dimensioonidega vastavalt **n*n** ja **n*r**. Eeldame, et süsteem (3.31) on täielikult juhitav.

Etalonmudel on antud kujul

$$\dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{m}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A_m x_m}(\mathbf{t}) + \mathbf{B_m w}(\mathbf{t}) \qquad (3.32)$$

kus $\mathbf{A_m}$ on **n*n** maatriks, $\mathbf{B_m}$ on **n*r** maatriks ja **w(t)** on tõkestatud seadesuurus (s.t. vektor, mille kõik koordinaadid on tõkestatud). Eeldame, et etalonmudel on asümptootiliselt stabiilne.

Meie eesmärgiks on sünteesida süsteem nii, et ta järgiks etalonmudelit

$$\lim_{t\to\infty}[\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{x_m}(\mathbf{t})] = \mathbf{0}.$$

Valides regulaatori alljärgnevalt

$$\mathbf{u(t) = -K(t)x(t) + K_0(t)w(t)}, \qquad (3.33)$$

saame suletud süsteemi võrrandi kujul

$$\mathbf{\dot{x}(t) = [A - BK(t)]x(t) + BK_0(t)w(t)}. \qquad (3.34)$$

Suletud süsteem järgib täpselt etalonmudelit, kui regulaatori maatriksid **K** ja $\mathbf{K_0}$ rahuldavad järgnevaid võrrandeid

$$\begin{aligned} \mathbf{A - BK} &= \mathbf{A_m} \\ \mathbf{BK_0} &= \mathbf{B_m} \end{aligned} \qquad (3.35)$$

Defineerime oleku veavektori ja regulaatori maatriksite veamaatriksid alljärgnevalt

$$\mathbf{e(t) = x(t) - x_m(t)}$$
$$\mathbf{\tilde{K}(t) = K(t) - K} \quad \text{ja} \quad \mathbf{\tilde{K}_0(t) = K_0(t) - K_0} \qquad (3.36)$$

Oleku veavõrrand, arvestades eelnevat, on esitatav kujul

$$\begin{aligned} \mathbf{\dot{e}(t)} &= \mathbf{\dot{x}(t) - \dot{x}_m(t)}, \\ &= \mathbf{[A - BK(t)]x(t) + BK_0(t)w(t) - A_m x_m(t) + B_m w(t)}, \\ &= \mathbf{A_m e(t) - B\tilde{K}(t)x(t) + B\tilde{K}_0(t)w(t)} \end{aligned} \qquad (5.37)$$

Esiteks vaatleme juhtumit, kus juhitava **n** järku lineaarse süsteemi(3.31) maatriks **B** on teada. Lihtsustuvad häälestatava regulaatori võrrand (3.33) ja oleku veavõrrand (3.37) ning on esitatavad alljärgnevalt

$$\mathbf{u(t) = -K(t)x(t) + K_0 w(t)},$$
$$\mathbf{\dot{e}(t) = A_m e(t) - B\tilde{K}(t)x(t)}.$$

Ljapunovi funktsiooni valime kujul

$$\mathbf{V(e,\tilde{K}) = e^T(t)Pe(t) + Tr\{\tilde{K}^T(t)\tilde{K}(t)\}},$$

kus **P** on positiivselt määratud **n*n** maatriks.

Leiame Ljapunovi funktsiooni tuletise oleku veavõrrandiga määratud trajektooril

$$\begin{aligned} \mathbf{\dot{V}(e,\tilde{K})} &= \mathbf{\dot{e}^T(t)Pe(t) + e^T(t)P\dot{e}(t) + Tr\{2\dot{\tilde{K}}^T(t)\tilde{K}(t)\}}, \\ &= \mathbf{[A_m e(t) - B\tilde{K}(t)x(t)]^T Pe(t) + e(t)P[A_m e(t) - B\tilde{K}(t)x(t)] + Tr\{2\dot{\tilde{K}}^T(t)\tilde{K}(t)\}}, \\ &= \mathbf{e(t)[A_m{}^T P + PA_m]e(t) - 2[-e(t)PB\tilde{K}(t)x(t) + Tr\{\dot{\tilde{K}}^T(t)K(t)\}]} \end{aligned}$$

$\mathbf{\dot{V}(e,\tilde{K})}$ avaldises muutub kandilistes sulgudes olev liige nulliks parajasti siis, kui valida regulaatori häälestusalgoritm kujul

$$\mathbf{\dot{\tilde{K}}(t) = B^T Pe(t)x^T(t)}.$$

Vastavalt Malkini teoreemile, kui $\mathbf{A_m}$ on **n*n** asümptootiliselt stabiilne maatriks ja **Q** on suvaline sümmeetriline **n*n** positiivselt määratud maatriks, siis maatriksvõrrandi

$$\mathbf{A_{mT}P + PA_m = -Q}$$

lahendiks on sümmeetriline positiivselt määratud **n*n** maatriks **P**.

Järelikult $\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{e},\tilde{\mathbf{K}})$ on negatiivselt poolmääratud

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{e},\tilde{\mathbf{K}}) = -\mathbf{e(t)Qe(t)} \le \mathbf{0}$$

ja tasakaaluolek **e(t)=0** ja $\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{t}) = \mathbf{0}$ on stabiilne.
Regulaatori häälestusalgoritm on võimalik realiseerida kujul

$$\dot{\mathbf{K}}(\mathbf{t}) = \mathbf{B^T Pe(t)x^T(t)},$$

millele vastab stabiilne tasakaaluolek **e(t)=0** ja **K(t)=K** (s.t. süsteem käitub täpselt nagu etalonmudel).

Teiseks vaatleme üldjuhtumit. Modifitseerides regulaatorit (3.33) järgmiselt

$$\mathbf{u(t) = -K_0(t)K(t)x(t) + K_0(t)u(t)} \tag{3.38}$$

saame suletud süsteemi olekuvõrrandi kujul

$$\dot{\mathbf{x}}\mathbf{(t)} = \mathbf{[A - BK_0(t)K(t)]x(t) + BK_0(t)w(t)}.$$

(3.39)

Suletud süsteem käitub täpselt nagu etalonmudel, kui regulaatori maatriksid **K** ja $\mathbf{K_0}$ rahuldavad järgmisi võrrandeid

$$\mathbf{A - KK_0K = A_m},$$
$$\mathbf{BK_0 = B_m}. \tag{3.40}$$

Lähtudes olekuvektori vea avaldisest (3.36) ja suletud süsteemi olekuvõrrandist (3.39) ning etalonmudelist (3.32) moodustame veavõrrandi

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}\mathbf{(t)} &= \dot{\mathbf{x}}\mathbf{(t)} - \dot{\mathbf{x}}_\mathbf{m}\mathbf{(t)},\\ &= \mathbf{A_m e(t) + [A - BK_0(t)K(t) - A_m]x(t) + [BK_0(t) - B_m]w(t)}.\end{aligned}$$

Teisendame saadud veavõrrandit, arvestades regulaatori (5.38) täpse häälestuse võrrandeid (5.40)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}\mathbf{(t)} &= \mathbf{A_m e(t) + [A - B(K_0 + K_0(t) - K_0)K(t) - A_m]x(t) + [B(K_0(t) - K_0)]w(t)},\\ &= \mathbf{A_m e(t) + [A - BK_0K_0(t) - BK_0(t)K(t) - A + BK_0K]x(t) + [B(K_0(t) - K_0)]w(t)},\\ &= \mathbf{A_m e(t) - B_m[K(t) - K]x(t) - B_m[(K_0)^{-1}K_0(t) - I_r]K(t)x(t) + B_m[(K_0)^{-1}K(t) - I_r]w(t)},\\ &= \mathbf{A_m e(t) - B_m[K(t) - K]x(t) - B_m[(K_0)^{-1}(t) - (K_0)^{-1}]u(t)},\\ &= \mathbf{A_m e(t) - B_m\tilde{K}(t)x(t) - B_m(\tilde{K}_0)(t)u(t)},\end{aligned} \tag{3.41}$$

kus $\mathbf{\tilde{K}(t) = K(t) - K}$ ja $\mathbf{(\tilde{K}_0)(t) = (K_0)^{-1}(t) - (K_0)^{-1}}$ ning $\mathbf{I_r}$ on **r*r** ühikmaatriks.

Valime Ljapunovi funktsiooni kujul

$$\mathbf{V(e,\tilde{K},\tilde{K}_0) = e^T(t)Pe(t) + Tr\left\{\tilde{K}^T(t)\tilde{K}(t) + (\tilde{K}_0)^{T(t)}\tilde{K}_0(t)\right\}},$$

kus **P** on **n*n** positiivselt määratud sümmeetriline maatriks. $\mathbf{V(e,\tilde{K},\tilde{K}_0)}$ on ruutvorm oleku veavektorist ja modifitseeritud regulaatori maatriksite veamaatriksitest ning on positiivselt määratud.

Arvutame $\mathbf{V(e,\tilde{K},\tilde{K}_0)}$ tuletise oleku veavõrrandiga (5.41) määratud trajektooril

$$\mathbf{\dot{V}(e,\tilde{K},\tilde{K}_0) = e^T(t)\left\{(A_m)^T P + PA_m\right\}e(t) - 2x^T(t)\tilde{K}^T(t)(B_m)^T Pe(t) - 2u^T(t)(\tilde{K}_0)^T(t)(B_m)^T Pe(t) +}$$

$$\mathbf{+ 2Tr\left\{\dot{\tilde{K}}^T(t)\tilde{K}(t)\right\} + 2Tr\left\{(\dot{\tilde{K}}_0)^T(t)(\tilde{K}_0)(t)\right\}} \qquad (3.42)$$

Valides modifitseeritud regulaatori häälestusalgoritmid kujul

$$\begin{aligned}&\mathbf{\dot{\tilde{K}}(t) = (B_m)^T Pe(t)x^T(t)},\\ &\mathbf{(\dot{\tilde{K}})(t) = (B_m)^T Pe(t)u^T(t)}\end{aligned} \qquad (3.43)$$

ja arvestades Malkini teoreemi $\mathbf{(A_m)^T P + PA_m = -Q}$, saame

$$\mathbf{\dot{V}(e,\tilde{K},\tilde{K}_0) = -e^T(t)Qe(t) \leq 0}$$

Stabiilseks tasakaaluolekuks on **e(t)=0,** $\mathbf{\tilde{K}(t) = 0}$ ja $\mathbf{(\tilde{K}_0)(t) = 0}$.

Adaptiivregulaatori realiseerimiseks tuleb häälestusalgoritmid, lähtudes parameetrite veamaatriksite avaldistest, esitada kujul

$$\begin{aligned}&\mathbf{\dot{K}(t) = (B_m)^T Pe(t)x^T(t)},\\ &\mathbf{(\dot{K}_0)^{-1}(t) = (B_m)^T Pe(t)u^T(t)}\end{aligned} \qquad (3.44)$$

Tasakaaluolek **e(t)=0, K(t)=K** ja $\mathbf{(K_o)^{-1}(t)=(K_o)^{-1}}$ on stabiilne.

Mittelineaarsete süsteemide identifitseerimine ja juhtimine

Käesolevas alajaotuses vaatleme Ljapunovi meetodi kasutamist mittelineaarsete süsteemide identifitseerimiseks ja juhtimiseks ettenähtud etalonmudeliga adaptiivsüsteemide sünteesil.

Identifitseeritav ja juhitav skalaarne mittelineaarne süsteem olgu antud olekuvõrrandiga kujul

$$\mathbf{\dot{x}(t) = ax(t) + a_0 f(x) + bu(t)}, \qquad (3.45)$$

kus $\mathbf{a}$, $\mathbf{a_0}$ ja $\mathbf{b}$ on konstantsed, aga tundmatud. Olek $\mathbf{x(t)}$ ja $\mathbf{f(x)}$ on mõõdetavad. Mittelineaarne funktsioon $\mathbf{f(x)}$ on sile funktsioon olekust ja $\mathbf{f(0)=0}$.

Mittelineaarse süsteemi identifitseerimine. Süsteemi (3.45) parameetrite hindamiseks valime hindaja kujul

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(\mathbf{t}) = \mathbf{a_m}\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) + \left[\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{t}) - \mathbf{a_m}\right]\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \hat{\mathbf{a}}_0(\mathbf{t})\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{t})\mathbf{u}(\mathbf{t}), \qquad (3.46)$$

kus $\mathbf{a_m<0}$. Eesmärk on häälestada parameetrid $\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{t}), \hat{\mathbf{a}}_0(\mathbf{t})$ ja $\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{t})$ nii, et

$$\lim_{t\to\infty}\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{t}) = \mathbf{a}, \quad \lim_{t\to\infty}\hat{\mathbf{a}}_0(\mathbf{t}) = \mathbf{a_0} \quad \text{ja} \quad \lim_{t\to\infty}\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{t}) = \mathbf{b}$$

ning kõik signaalid adaptiivsüsteemis jäävad tõkestatuteks.

Defineerime oleku ja parameetrite vead alljärgnevalt

$$\mathbf{e}(\mathbf{t}) = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) - \mathbf{x}(\mathbf{t}), \quad \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{t}) = \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{t}) - \mathbf{a}, \quad \tilde{\mathbf{a}}_0(\mathbf{t}) = \hat{\mathbf{a}}_0(\mathbf{t}) - \mathbf{a_0} \quad \text{ja} \quad \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{t}) = \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{t}) - \mathbf{b}\,.$$

Moodustame veamudeli

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}(\mathbf{t}) &= \dot{\hat{\mathbf{x}}}(\mathbf{t}) - \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) \\ &= \mathbf{a_m}\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) + \left[\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{t}) - \mathbf{a_m}\right]\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \hat{\mathbf{a}}_0(\mathbf{t})\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{t}) - \mathbf{a}\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{a_0}\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\mathbf{u}(\mathbf{t}) \\ &= \mathbf{a_m}\mathbf{e}(\mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{t})\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{a}}_0(\mathbf{t})\mathbf{f}(\mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{t})\mathbf{u}(\mathbf{t}) \qquad (3.47)\end{aligned}$$

Adaptiivsüsteemi parameetrite häälestusalgoritmide leidmiseks moodustame Ljapunovi funktsiooni kujul

$$\mathbf{V}(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{a}}_0, \tilde{\mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left[\mathbf{e}^2(\mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{a}}^2(\mathbf{t}) + (\tilde{\mathbf{a}}_0)^2(\mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{b}}^2(\mathbf{t})\right] \qquad (3.48)$$

$\mathbf{V}(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{a}}_0, \tilde{\mathbf{b}})$ on positiivselt määratud ruutfunktsioon oleku ja parameetrite vigadest.

Arvutame $\mathbf{V}(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{a}}_0, \tilde{\mathbf{b}})$ tuletise veavõrrandi (3.47) trajektooril

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{a}}_0, \tilde{\mathbf{b}}) &= \mathbf{e}(\mathbf{t})\dot{\mathbf{e}}(\mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{t})\dot{\tilde{\mathbf{a}}}(\mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{a}}_0(\mathbf{t})\dot{\tilde{\mathbf{a}}}_0(\mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{t})\dot{\tilde{\mathbf{b}}}(\mathbf{t}) \\ &= \mathbf{a_m}\mathbf{e}(\mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{t})\left[\dot{\tilde{\mathbf{a}}}(\mathbf{t}) + \mathbf{e}(\mathbf{t})\mathbf{x}(\mathbf{t})\right] + \tilde{\mathbf{a}}_0(\mathbf{t})\left[\dot{\tilde{\mathbf{a}}}_0(\mathbf{t}) + \mathbf{e}(\mathbf{t})\mathbf{f}(\mathbf{t})\right] + \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{t})\left[\dot{\tilde{\mathbf{b}}}(\mathbf{t}) + \mathbf{e}(\mathbf{t})\mathbf{u}(\mathbf{t})\right]. \qquad (3.49)\end{aligned}$$

Valides regulaatori häälestusalgoritmid alljärgnevalt

$$\dot{\tilde{\mathbf{a}}}(\mathbf{t}) = -\mathbf{e}(\mathbf{t})\mathbf{x}(\mathbf{t}), \quad \dot{\tilde{\mathbf{a}}}_0(\mathbf{t}) = -\mathbf{e}(\mathbf{t})\mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \text{ja} \quad \dot{\tilde{\mathbf{b}}}(\mathbf{t}) = -\mathbf{e}(\mathbf{t})\mathbf{u}(\mathbf{t}) \qquad (3.50)$$

on $\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{a}}_0, \tilde{\mathbf{b}})$ negatiivselt poolmääratud

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{a}}_0, \tilde{\mathbf{b}}) \le \mathbf{0}\,.$$

Stabiilseks tasakaaluolekuks on $\mathbf{e}(\mathbf{t}) = \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{t}) = \tilde{\mathbf{a}}_0(\mathbf{t}) = \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{t}) = \mathbf{0}$.

Adaptiivsüsteemi realiseerimiseks tuleb regulaatori häälestusalgoritmid (3.50) esitada kujul

$$\dot{\hat{\mathbf{a}}}(\mathbf{t}) = -\mathbf{e}(\mathbf{t})\mathbf{x}(\mathbf{t}),\ \dot{\hat{\mathbf{a}}}_0(\mathbf{t}) = -\mathbf{e}(\mathbf{t})\mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \text{ja} \quad \dot{\hat{\mathbf{b}}}(\mathbf{t}) = -\mathbf{e}(\mathbf{t})\mathbf{u}(\mathbf{t}) \qquad (3.51)$$

Stabiilseks tasakaaluolekuks reaalses adaptiivsüsteemis on vastavalt $\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{t}) = \mathbf{a},\ \hat{\mathbf{a}}_0(\mathbf{t}) = \mathbf{a}_0$ ja $\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{t}) = \mathbf{b}$ (see oligi meie eesmärgiks).

Mittelineaarse süsteemi juhtimine. Süsteemi (3.45) adaptiivjuhtimiseks valime häälestatava regulaatori kujul

$$\mathbf{u}(\mathbf{t}) = -\mathbf{k}_1(\mathbf{t})\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{k}_2(\mathbf{t})\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{k}_0(\mathbf{t})\mathbf{w}(\mathbf{t}) \qquad (3.52)$$

Etalonmudel on antud kujul

$$\dot{\mathbf{x}}_\mathbf{m}(\mathbf{t}) = \mathbf{a}_\mathbf{m}\mathbf{x}_\mathbf{m}(\mathbf{t}) + \mathbf{b}_\mathbf{m}\mathbf{w}(\mathbf{t}),\ \ \mathbf{a}_\mathbf{m} < \mathbf{0}\,. \qquad (3.53)$$

Lähtudes juhitava süsteemi olekuvõrrandist (3.45) ja regulaatori võrrandist (3.52), leiame suletud süsteemi olekuvõrrandi kujul

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) &= \mathbf{a}\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{a}_0\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}\left[-\mathbf{k}_1(\mathbf{t})\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{k}_2(\mathbf{t})\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{k}_0(\mathbf{t})\mathbf{w}(\mathbf{t})\right]\\ &= \left[\mathbf{a} - \mathbf{b}\mathbf{k}_1(\mathbf{t})\right]\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \left[\mathbf{a}_0 - \mathbf{b}\mathbf{k}_2(\mathbf{t})\right]\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}\mathbf{k}_0(\mathbf{t})\mathbf{w}(\mathbf{t}) \qquad (3.54)\end{aligned}$$

Defineerime oleku vea kujul

$$\mathbf{e}(\mathbf{t}) = \mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{x}_\mathbf{m}(\mathbf{t})\,.$$

Lähtudes oleku vea avaldisest, suletud süsteemi olekuvõrrandist (3.54) ja etalonmudeli olekuvõrrandist (3.53) selgub, et adaptiivsüsteem järgib täpselt etalonmudelit parajasti siis, kui regulaatori parameetrid **($\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_0$)** rahuldavad võrrandeid

$$\mathbf{a} - \mathbf{b}\mathbf{k}_1 = \mathbf{a}_\mathbf{m},\ \mathbf{a}_0 - \mathbf{b}\mathbf{k}_2 = \mathbf{0}\,. \quad \text{ja} \quad \mathbf{b}\mathbf{k}_0 = \mathbf{b}_\mathbf{m}\,. \qquad (3.55)$$

Adaptiivsüsteemi sünteesiks moodustame veavõrrandi, lähtudes suletud süsteemi olekuvõrrandist (3.54), etalonmudelist (3.53) ja niinimetatud täpse häälestuse võrrandeist (3.55)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}(\mathbf{t}) &= \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) - \dot{\mathbf{x}}_\mathbf{m}(\mathbf{t})\\ &= \mathbf{a}_\mathbf{m}\mathbf{e}(\mathbf{t}) + \left[\mathbf{a} - \mathbf{b}\mathbf{k}_1(\mathbf{t}) - \mathbf{a}_\mathbf{m}\right]\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \left[\mathbf{a} - \mathbf{b}\mathbf{k}_2(\mathbf{t}) - \mathbf{a}_\mathbf{m}\right]\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \left[\mathbf{b}\mathbf{k}_0(\mathbf{t}) - \mathbf{b}_\mathbf{m}\right]\mathbf{w}(\mathbf{t})\\ &= \mathbf{a}_\mathbf{m}\mathbf{e}(\mathbf{t}) - \mathbf{b}\tilde{\mathbf{k}}_1(\mathbf{t})\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{b}\tilde{\mathbf{k}}_2(\mathbf{t})\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}\tilde{\mathbf{k}}_0(\mathbf{t})\mathbf{w}(\mathbf{t})\,, \qquad (3.56)\end{aligned}$$

kus $\tilde{\mathbf{k}}_1(\mathbf{t}) = \mathbf{k}_1(\mathbf{t}) - \mathbf{k}_1$, $\tilde{\mathbf{k}}_2(\mathbf{t}) = \mathbf{k}_2(\mathbf{t}) - \mathbf{k}_2$ ja $\tilde{\mathbf{k}}_0(\mathbf{t}) = \mathbf{k}_0(\mathbf{t}) - \mathbf{k}_0$.

Vaatleme juhtumit, kus ainult parameetri **b** märk on teada.

Adaptiivsüsteemi parameetrite häälestusalgoritmide leidmiseks ja stabiilsuse analüüsiks moodustame Ljapunovi funktsiooni kujul

$$\mathbf{V}(\mathbf{e},\tilde{\mathbf{k}}_1,\tilde{\mathbf{k}}_2,\tilde{\mathbf{k}}_0) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left[\mathbf{e}^2(\mathbf{t}) + |\mathbf{b}|\left((\tilde{\mathbf{k}}_1)^2(\mathbf{t}) + (\tilde{\mathbf{k}}_2)^2(\mathbf{t}) + (\tilde{\mathbf{k}}_0)^2(\mathbf{t})\right)\right]$$

ning arvutame sellest tuletise veavõrrandiga (3.56) määratud trajektooril

$$\dot{V}(e,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,\tilde{k}_0) = e(t)\dot{e}(t) + |b|\left[\tilde{k}_1(t)\dot{\tilde{k}}_1(t) + \tilde{k}_2(t)\dot{\tilde{k}}_2(t) + \tilde{k}_0(t)\dot{\tilde{k}}_0(t)\right],$$
$$= a_m e(t) + |b|\left\{\tilde{k}_1(t)\left[-\,sign(b)e(t)x(t) + \dot{\tilde{k}}_1(t)\right] + \tilde{k}_2(t)\left[-\,sign(b)e(t)f(x) + \dot{\tilde{k}}_2(t)\right] + \right.$$
$$\left. + \tilde{k}_0(t)\left[-\,sign(b)e(t)w(t) + \dot{\tilde{k}}_1(t)\right]\right\}.$$

Valides regulaatori parameetrite häälestusalgoritmid kujul **(V(e,k$_1$,k$_2$,k$_o$))** avaldises kandilistes sulgudes olevad liikmed muutuvad nulliks)

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{k}}_1(t) &= sign(b)e(t)x(t) \\ \dot{\tilde{k}}_2(t) &= sign(b)e(t)f(x) \\ \dot{\tilde{k}}_0(t) &= -sign(b)e(t)w(t) \end{aligned} \qquad (3.57)$$

on $\dot{V}(e,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,\tilde{k}_0)$ negatiivselt poolmääratud

$$\dot{V}(e,\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,\tilde{k}_0) = a_m e(t) \le 0 .$$

Järelikult, tasakaaluolek $e(t) = \tilde{k}_1(t) = \tilde{k}_2(t) = \tilde{k}_0(t) = 0$ on stabiilne.

Adaptiivsüsteemi realiseerimiseks esitame häälestusalgoritmid kujul

$$\begin{aligned} \dot{k}_1(t) &= sign(b)e(t)x(t) \\ \dot{k}_2(t) &= sign(b)e(t)f(x) \\ \dot{k}_0(t) &= -sign(b)e(t)w(t) \end{aligned} \qquad (3.58)$$

Stabiilseks tasakaaluolekuks on **e(t)=0**, **k$_1$(t)=k$_1$**, **k$_2$(t)=k$_2$** ja **k$_o$(t)=k$_o$** , mis tähendab, et sünteesitud adaptiivsüsteem järgib täpselt etalonmudelit.

Käesolevas alajaotuses tuletatud identifitseerimise ja juhtimise skeemid on võimalik üldistada mitmemõõtmelise mittelineaarse süsteemi identifitseerimiseks ja juhtimiseks, kui mittelineaarne süsteem on esitatav kujul

$$\dot{x}(t) = A_1 x(t) + A_2 f(x(t)) + Bu(t) \qquad (3.59)$$

kus **A$_1$**, **A$_2$** ja **B** on konstantsed, aga tundmatud maatriksid ning **f(x(t))** on teadaolev sile vektorfunktsioon, nii et (3.59) omaks tõkestatud lahendit suvalise tõkestatud sisendvektori **u(t)** puhul.