5. SÜSTEEMIDE ÜLDISED OMADUSED
(*INTRINSIC SYSTEM PROPERTIES*)

5.1. SÜSTEEMI STABIILSUS (*SYSTEM STABILITY*)

5.1.1. STABIILSUSE OLEMUS (*CONCEPT OF STABILITY*)

Stabiilsus tähistab süsteemi ja tema protsesside teatavat püsivust, säilivust, koonduvust. Stabiilsuse puudumine viib sageli katastroofini või hävinguni. Just seepärast märkame ümbritsevas maailmas esmajoones stabiilseid süsteeme ja nähtusi. Ka eeldab süsteemi kasulikkus või kasutatavus tavaliselt selle stabiilsust.

Lihtsaim on süsteemi **tasakaaluoleku stabiilsuse** probleem. Tasakaaluolekuks nimetatakse süsteemi olekut, kus süsteem välistoimete puudumisel võib paikneda püsivalt, piiramatu aja kestel. Koolifüüsikas illustreeritakse tasakaaluoleku stabiilsust sageli kera paiknemisega mitmesugustel pindadel (joonis 5.1). Stabiilsust kontrollitakse tavaliselt süsteemi (siin kera) esialgsest tasakaaluolekust väljaviimisega ja seejärel omapead jätmisega (vabaliikumine). Tasakaaluolekusse naasva kera olek on stabiilne (S), mittenaasval aga mittestabiilne (MS). Vahepealseks piirvormiks on neutraalne (N) tasakaaluolek, kuhu kera ei naase, vaid jääb püsivalt uude olekusse, mis on samuti tasakaaluolek. Neutraalse oleku puhul on kui tahes lähestikku palju tasakaaluolekuid teatava pinnaosa ulatuses. Eelöeldust on näha, et tasakaalu stabiilsus on vaba süsteemi sisemine omadus, mille puhul stabiilsuse määravad tasakaalupunkti lähima ümbruse omadused.
Tasakaalupunktid (*equilibrium points*) defineeritakse diferentsiaalsüsteemi selliste olekutena, kus kõik olekumuutujad rahuldavad tingimusi

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = 0 \qquad i=1...n \quad \text{või vektorvõrrandina} \quad \frac{dX(t)}{dt} = 0 \tag{5.1}$$

<u>NÄIDE 5.1</u>

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_1^2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0 \Rightarrow x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 &= 0 \Rightarrow x_1(1-x_1) = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_{11} &= 0 \\ x_{12} &= 1 \end{aligned} \Rightarrow \text{Tasakaalupunktid on}$$

$(0 \,|\, 0)$, $(1 \,|\, 0)$.

On näha, et mittelineaarsel süsteemil võib olla palju tasakaalupunkte, aga ka ei ühtegi. Lineaarsel süsteemil on üksainus tasakaalupunkt. Seejuures tuleb arvestada,et füüsikalistel süsteemidel saavad tasakaalupunktideks olla vaid võrrandite reaalarvulised lahendid.

Mõnevõrra keerukam on **liikumistrajektoori stabiilsuse** probleem. Liikumise all mõistetakse lihtsalt olekumuutujate ajalisi muutusi, kusjuures trajektoor ongi olekupunktide jada. Üldiselt olekutrajektoorid algavad ja lõpevad tasakaalupunktides, lõpmatuses või moodustavad suletud trajektoori. Ka trajektoori stabiilsuse puhul on stabiilsuse hindamise aluseks **perturbatsiooniprintsiip** (häirituse tekitamise põhimõte). Stabiilse trajektoori korral mingil hetkel tekitatud häiritus kas hääbub aja jooksul täielikult (siis räägitakse **asümptootilisest stabiilsusest**) või jääb tõkestatuks (ei kasva piiramatult).

Orbitaalne stabiilsus hõlmab perioodilisi protsesse suletud (kinnise) liikumistrajektooriga (orbiidiga). Siin on stabiilsuseks piisav liikumistrajektoori püsiv paiknemine trajektoori ümbritsevas torutaolises piirkonnas.

Struktuuri stabiilsus on erinevalt liikumise (protsesside) stabiilsusest määratud süsteemisiseste sidemete muutumisega. Seejuures on näiteks aine keemilise struktuuri, sõrestikehitise, börsi või sidesüsteemi stabiilsuse probleemid tugevasti spetsiifilised. Põhilised struktuuri stabiilsuse rakendused on seotud katastroofiteooriaga. Seosed protsesside stabiilsusega väljenduvad eeskätt selles, et struktuurimuutustega võib seostuda protsesside iseloomu kvalitatiivne muutumine.

Esimese tasakaalupunkti stabiilsuse, nn. Lagrange'i stabiilsuse matemaatilise kriteeriumi andis J. L. Lagrange 1788.a. mehaanilise liikumise jaoks. Selle järgi on stabiilses tasakaalupunktis süsteemi potentsiaalne energia minimaalne. On ju hõlpsasti mõistetav, et niisugusest olekust väljaviimiseks on vajalik väline energia. Kahjuks pole energiamiinimumi printsiip üldisena rakendatav. Näiteks osas 4.8 vaadeldud algoritm on käsitatav süsteemina, kuid energia mõistet ei saa mittefüüsikalise nähtusega seostada.

Üldisem ning liikumisega seostatud on A. M. Ljapunovi poolt pakutud nn. **Ljapunovi stabiilsuse** mõiste, mille ta avaldas 1892.a. dissertatsioonina. Matemaatilisuse ja abstraktsuse tõttu jäi see esialgu vähemärgatavaks, kuni 1950-ndail aastail hakati mõistma Ljapunovi idee üldisuse, universaalsuse ja ranguse olulist tähtsust süsteemide analüüsil. Nagu ka eespool selgitatud, tähendab liikumine selles teoorias olekute muutumist ajas, kusjuures liikumistrajektoori stabiilsuse mõiste aluseks on perturbatsiooniprintsiip (häirituse põhimõte). Häirituse olemasolul eristatakse:

– nominaalset ehk häirimata liikumistrajektoori X(t);
– häiritud liikumistrajektoori $X_h(t)$, kusjuures häiritus tekib alghetkel t_0, mille järel süsteem toimib ilma väliste mõjutusteta sisemiste omaduste kohaselt.

Häirituse suurust mõõdetakse vektori normi $\|X(t)\|$ mõiste abil. See võib olla määratud näiteks kujul

$$\|X(t)\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k(t)^2} \qquad 5.2a$$

$$\|X(t)\| = \sum_{k=1}^{n} |x_k(t)| \qquad 5.2b$$

või veel mõnel muul normi omadusi rahuldaval viisil.

Häirituse $\Delta X(t)=X_h(t)-X(t)$ normiks on $\|\Delta X(t)\|$.

Ljapunovi järgi on liikumine X(t) stabiilne, kui mistahes väikese ε korral leidub δ(ε), nii et

$$\|\Delta X(t_0)\| < \varepsilon \;\Rightarrow\; \forall t \in [t_0,\infty] \;:\; \|\Delta X(t)\| < \delta(\varepsilon) \qquad 5.3$$

Erijuhtumiks on asümptootiline stabiilsus lisanõudega

$$\lim_{t\to\infty} \|\Delta X(t_0)\| = 0 \qquad 5.4$$

Avaldise 5.3 eelduslik osa tähendab, et alghetke häiritus süsteemis on piisavalt väike. Järeldusliku osa kohaselt saab stabiilse süsteemi korral näidata kõigi edasiste ajahetkede jaoks ühtse piirkonna (“toru”) ulatusega δ(ε), millest häiritud trajektoor $X_h(t)$ ühelgi ajahetkel väljapoole ei lähe. Piisav on nõue, et sellise δ-toru saab üldse moodustada. Asümptootilise stabiilsuse nõue on rangem piirväärtuse 5.4 tõttu, mis sisuliselt tähendab, et alghäirituse mõju lõpmatuses täielikult hääbub (süsteem “unustab” häirituse).
Ljapunovi stabiilsuse kontseptsioon on oma abstraktsuse tõttu rakendatav väga mitmesuguste ülesandeklasside korral. Näiteks saab tasakaaluolekut käsitleda ühestainsast punktist koosneva trajektoorina kõigi ajahetkede jaoks.

Viimastel aastakümnetel on mõningat rakendamist leidnud veel üks stabiilsuskontseptsioon, mis tugineb süsteemi ülekandeomadustele. Rahvusvaheliselt tuntakse seda tõkestatud sisendi ja tõkestatud väljundi stabiilsusena ehk **BIBO-stabiilsusena** (*bounded input – bounded output stability*). Muutuja u(t) on tõkestatud, kui kehtib tingimus

$$\forall t \in [0,\infty), |u(t)| \le k_1 \qquad 5.5$$

kus k_1 on lõplik reaalarv.
Süsteemi nimetatakse BIBO-stabiilseks, kui nullise algolekuga süsteemis mistahes tõkestatud sisendmuutuja tekitab tõkestatud väljundmuutuja.

5.1.2. STABIILSUSKRITEERIUMID (*CRITERIA OF SYSTEM STABILITY*)

BIBO-stabiilsuse kriteerium ühe sisendi ja ühe väljundiga lineaarsele statsionaarsele süsteemile on hõlpsasti tuletatav, lähtudes konvolutsiooniintegraalist

$$y(t)=\int_0^\infty h(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Eeldame, et kehtib $|u(\tau)| \le k_1$. Nüüd eeldame, et kehtib

$$|y(t)| = \left|\int_0^\infty h(t-\tau)u(\tau)d\tau\right| \le \int_0^\infty |h(t-\tau||u(\tau)|d\tau \le k_2$$

mis tähendab, et ka y(t) tõkestatus on garanteeritud. Asendades viimases integraalis $|u(\tau)|$ väärtusega k_1, saame

$$\int_0^\infty |h(t-\tau)|d\tau \le k_2/k_1 \quad \text{ehk} \quad \int_0^\infty |h(\tau)|d\tau < M \qquad 5.6$$

Järelikult on BIBO-stabiilsuse kriteeriumiks süsteemi impulsskaja absoluutväärtuse integraali tõkestatus rajade [0,∞) korral. Et lineaarse süsteemi impulsskaja on valemi 3.33 alusel väljendatav $e^{\lambda_i t}$ tüüpi eksponentliikmeid sisaldavate moodide summana, siis on hõlbus mõista, et tingimus 5.6 on täidetud parajasti siis, kui süsteemi iga pooluse jaoks kehtib

$$\mathrm{Re}\lambda_i < 0 \qquad 5.7$$

Mittelineaarsete süsteemide puhul on BIBO-stabiilsuse kontseptsiooni raske kasutada, kuna üldjuhul konvolutsiooniintegraal ei kehti ning globaalse tõkestuse määramine mistahes tõkestatud sisendite korral on praktiliselt võimatu.
Ljapunovi stabiilsuse kriteeriumid sõltuvad stabiilsuse liigist ja süsteemi omadustest.
Tasakaalupunkti stabiilsuse määramisel saab lähtuda sellest, et stabiilsuse definitsioonis sisalduv häirituse piirkond ε võib olla lõpmatu väike piirkond tasakaalupunkti ümbruses. Kui selles piirkonnas arendada olekuvõrrandite funktsioonid Taylori ritta tasakaalupunkti x_{10}, x_{20}, ... x_{n0} ümbruses

i=1 **...** n,

$$f_i(x_1,\ldots,x_n) = f_i(x_{10},\ldots,x_{n0}) + \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right|_{x_i=x_{i0}} (x_1 - x_{10}) + \ldots + \left.\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right|_{x_i=x_{i0}} (x_n - x_{n0}) + 0(x^2, x^3, \ldots), \quad 5.8$$

siis see omandab tasakaalupunkti lähikonnas kuju

i=1 **...** n,

$$\dot{x}_i = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right|_{x_i=x_{io}} (x_1 - x_{10}) + \ldots + \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_n}\right|_{x_i=x_{i0}} (x_n - x_{n0}) \qquad 5.9$$

kuna valemi 5.8 esimene liige on tasakaalupunktis valemi 5.1 tõttu null ning jääkliiget $0(x^2, x^3, ...)$ võib tasakaalupunkti läheduses lugeda tühiseks.

Lineariseeritud süsteemi valemile 5.9 vastav süsteemimaatriks A avaldub maatriksina (tuntud ka Jacobi maatriksiks nimetatuna)

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \qquad 5.10$$

mille kõik tuletised on määratud tasakaalupunktis ($x_i=x_{i0}$). Lineariseeritud olekuvõrrandite jaoks on Ljapunov tõestanud järgmiste tingimuste kehtivuse, mis kindlustavad esialgse süsteemi vastava tasakaalupunkti stabiilsuse.

1. Kui kõigi A-maatriksi (5.10) omaväärtuste reaalosad on negatiivsed, siis on tasakaalupunkt asümptootiliselt stabiilne.
2. Kui A-maatriksi vähemalt ühe omaväärtuse reaalosa on positiivne, siis on tasakaalupunkt mittestabiilne.
3. Kui A-maatriksil on mittekordseid imaginaarteljel paiknevaid poolusi (kordsus tähendab mittestabiilsust), siis lineariseeritud süsteem on mitteasümptootiliselt stabiilne (neutraalse tasakaalu tüüpi omadused), kuid esialgse mittelineaarse süsteemi käitumine tasakaalupunkti ümbruses ei tarvitse vastata lineariseeritud võrrandeist tulenevale.

Ljapunov on loonud veel teise, nn. otsese meetodi stabiilsuse analüüsiks, mis sobib eriti liikumistrajektooride stabiilsuse analüüsiks. Meetod põhineb nn. Ljapunovi funktsiooni V(x) konstrueerimisel. See funktsioon üldistab energiafunktsiooni ideed, mis on aluseks stabiilsuse määramisel minimaalse energia põhjal. Funktsioon V(x) peab kehtima kogu protsessi muutumispiirkonnas (δ-toru ulatuses). Ljapunovi järgi süsteemi $\overset{\circ}{X}(t)=F(X(t))$ liikumistrajektoor X(t) on stabiilne, kui osutub võimalikuks konstrueerida kogu protsessi muutumispiirkonnas δ kehtiv Ljapunovi funktsioon järgmiste omadustega:

a) $V(x)=X^TQX$ on positiivselt määratud funktsioon
(X-olekuvektor, Q- positiivsete omaväärtustega reaalmaatriks);

b) $\frac{dV(X)}{dt} = -X^T PX$ – negatiivselt (pool-) määratud funktsioon (P-positiivsete omaväärtustega maatriks)

$$= \frac{dV(X)}{dx} F(X)$$

Positiivne määratus tähendab: $V(X) > 0$, kui $X \neq 0$; $V(0)=0$, poolmääratuse korral võib ka $X\neq0$ puhul esineda $V(X)=0$. Ljapunovi funktsioonil on küll energiafunktsiooni vorm, kuid ei tarvitse olla energiale vastavat sisu. Süstemaatilisi meetodeid sobiva Ljapunovi funktsiooni leidmiseks ei eksisteeri. Mittelineaarsel süsteemil võib olla mitmeid nii stabiilseid kui ka mittestabiilseid tasakaalupunkte, aga ka liikumistrajektoore. Seetõttu võib mittelineaarse süsteemi stabiilsuse terviklik analüüs olla üpris keeruline ja töömahukas.

Nagu äsja selgitatud, on lineaarse süsteemi tasakaaluoleku stabiilsus määratud omaväärtuste reaalosa märkidega. Täpne omaväärtuse suurus pole seejuures oluline. Seetõttu on võimalik stabiilsust määrata, lahendamata omaväärtuste karaktervõrrandit.

Olgu selline võrrand antud kujul

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0. \qquad 5.11$$

A. Hurwitz on pakkunud (1895) välja järgmise asümptootilise stabiilsuse testi pidevaja süsteemile:

Moodustatakse determinantide jada

$$\det\begin{bmatrix} a_{n-1} & 1 & 0 & & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & a_1 & a_2 \\ 0 & \cdots & & 0 & a_0 \end{bmatrix} > 0; \ldots \det\begin{bmatrix} a_{n-1} & 1 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} \end{bmatrix} > 0; \ldots$$

$$\det\begin{bmatrix} a_{n-1} & 1 \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{bmatrix} > 0 \qquad 5.12$$

Esimese, suurima determinandi peadiagonaalil paiknevad valemi 5.11 koefitsiendid järjestikku alates teisest (s^{n-1} koef.). Ridades on koefitsiendid võrrandiga võrreldes vastupidises järjestuses. Puuduvad koefitsiendid asenduvad nullidega. Iga järgmine determinant (kokku n-1) saadakse eelnevast viimase rea ja viimase veeru eemaldamisega.

Süsteem on asümptootiliselt stabiilne, kui kõik determinandid on positiivsed.

Suhteliselt lihtsalt on põhjendatav ka väide, et stabiilse süsteemi karaktervõrrandi 5.11 kõik koefitsiendid peavad olema ühemärgilised (näit. positiivsed) ja mittenullised.

<u>NÄIDE 5.2a</u>

Antud süsteemi karaktervõrrand $s^4+5s^3+2s^2+4s+3=0$.

$$D_1=\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} > 0; \qquad D_2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} > 0; \qquad D_3 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} > 0;$$

Arendades D_1 ritta neljanda rea järgi, saame $3D_2 > 0$. Seega D_1 pole vaja arvestada.

Arendades D_2 ritta kolmanda rea alusel, saame $D_2 = 4\underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}}_{D_3} - 3\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

Nii saame D_3=6 ning D_2=4∗6-75=-51.
Et $D_2 < 0$, siis süsteem on mittestabiilne.

Tuntud alternatiiviks Hurwitzi testile on E. J. Routhi poolt 1976.a. avaldatud lineaarse süsteemi stabiilsustest, mis lähtub karaktervõrrandist 5.11 ja on tänapäeval kasutusel nn. Routhi tabeli vormis.

k i	1	2	3	4	5	
1	$a_n(=1)$	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	a_{n-8}	…
2	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	a_{n-9}	…
3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	c_{35}	…
4	c_{41}	c_{42}	c_{43}	c_{44}	c_{45}	…
5	c_{51}	c_{52}	c_{53}	c_{54}	c_{55}	…

Toodud tabeli kahte esimesse ritta paigutatakse karaktervõrrandi koefitsiendid maksimaalsest astmest alates (puuduvad koefitsiendid tähistatakse nullidega). Järgmiste ridade koefitsiendid arvutatakse valemiga

$$c_{ik} = c_{i-2,k+1} - \frac{c_{i-2,1} \cdot c_{i-1,k+1}}{c_{i-1,1}} \qquad 5.13$$

Näiteks: $c_{31} = a_{n-2} - \dfrac{a_n \cdot a_{n-3}}{a_{n-1}}$; $c_{32} = a_{n-4} - \dfrac{a_n \cdot a_{n-5}}{a_{n-1}}$; $c_{41} = a_{n-3} - \dfrac{a_{n-1} \cdot c_{32}}{c_{31}}$ jne.

Stabiilsel süsteemil peavad kõik esimese veeru koefitsiendid olema positiivsed (tingimus tagab asümptootilise stabiilsuse).

<u>NÄIDE 5.2b</u>

Koostame Routhi tabeli karaktervõrrandiga $s^4+5s^3+2s^2+4s+3=0$ süsteemile.

k i	1	2	3
1	1	2	3
2	5	4	0
3	$2 - \frac{1 \cdot 4}{5} = 1{,}2$	$3 - \frac{1 \cdot 0}{5} = 3$	0
4	$4 - \frac{5 \cdot 3}{1{,}2} = -8{,}5$	0	0
5	3 - 0=3	0	0
6	0	0	0

Hõlbus on veenduda, et teatavast reast alates iga veeru arvud muutuvad nulliks. Seepärast on tabel alati lõplik. Seejuures pikim on esimene veerg.
Kuna arvutatud tabel sisaldab negatiivse arvu esimeses veerus, on antud karaktervõrrandiga süsteem mittestabiilne. Matemaatiliselt on Hurwitzi ja Routhi testid täielikult ekvivalentsed. Kõrget järku süsteemi korral on Routhi test mõnevõrra vähem töömahukas.

5.1.3. DISKREETAJA SÜSTEEMI STABIILSUS (*STABILITY OF DISCRETE TIME SYSTEMS*)

Diskreetaja süsteemi olekuvõrrandid ning nende lahendid on analoogilised pidevaja süsteemi omadele, seepärast on ka stabiilsuse mõiste ja definitsioonid täielikult rakendatavad diskreetaja süsteemidele.
BIBO stabiilsuse kriteeriumiks on impulsskaja tõkestatus

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h[k]| < M \qquad 5.14$$

Selle tingimuse testimisel on arvutusteks vajalik impulsskaja analüütiline avaldis. Lineaarse diskreetaja süsteemi Ljapunovi stabiilsus on samuti määratav süsteemi omaväärtustega. Stabiilsustingimused omaväärtustele on aga erinevad, tingituna pidev- ja diskreetaja süsteemide omaväärtuste vastavusest valemi 4.2.1 alusel. Analüüs osas 4.7 näitas, et stabiilse pidevaja süsteemi poolused paiknevad s-tasandi vasakul pooltasandil (negatiivse reaalosaga omaväärtused). Sellele s-tasandi piirkonnale vastab z-tasandil ühikringjoone sisemus (joonis 4.6). Seega lineaarse diskreetaja süsteemi stabiilsuse kriteeriumiks on kõigi süsteemi omaväärtuste paiknemine ühikringjoone sisemuses. Teisiti öelduna tähendab see, et kõigi omaväärtuste moodulid peavad olema väiksemad ühest. Kuna see on piisav tingimus, siis on välja töötatud ka testid, mis on analoogilised pidevaja süsteemide stabiilsuse Hurwitzi ja Routhi testidega.
Üks lihtsamaid diskreetaja süsteemi stabiilsustestidest on E. I. Jury test (1958), mis on ka üsna sarnane Routhi testidega, kuigi märgatavalt keerulisem.
Kui lähtuda diskreetaja süsteemi karakterpolünoomist

$$D(z)=a_n z^n+a_{1-n} z^{n-1}+ \ldots +a_1 z+a_0$$

(tihti $a_n=1$), siis peavad ennekõike olema täidetud tingimused:

$$D(1)>0; \qquad (-1)^n D(-1)>0; \qquad |D(0)|<a_n \qquad 5.15$$

Need tingimused osutuvad esimest ja teist järku süsteemidele ka stabiilsuseks piisavateks.

Testi struktuuri saab esitada mugavalt tabelina

	a_0	a_1	a_2	...			a_{n-1}	a_n
	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...			a_1	a_0
				...				
$\lambda_1=\frac{a_0}{a_n}$	$b_0=a_1-\lambda_1 a_{n-1}$	$b_1=a_2-\lambda_1 a_{n-2}$	$b_2=a_3-\lambda_1 a_{n-3}$	...			$b_{n-1}=a_n-\lambda_1 a_0$	0
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	...			b_0	0
				...				
$\lambda_2=\frac{b_0}{b_{n-1}}$	$c_0=b_1-\lambda_2 b_{n-2}$	$c_1=b_2-\lambda_2 b_{n-3}$	$c_2=b_3-\lambda_2 b_{n-4}$	...		c_{n-2}	0	
	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	...		c_0	0	
				...				
$\lambda_3=\frac{c_0}{c_{n-2}}$	$d_0=c_1-\lambda_3 c_{n-3}$	$d_1=c_2-\lambda_3 c_{n-4}$	$d_2=c_3-\lambda_3 c_{n-5}$	...	d_{n-3}	0		
	d_{n-3}	d_{n-4}	d_{n-5}	...	d_0	0		
...	...	...	...	...	...			

Tabeli struktuuri aluseks on reapaarid, milles samad elemendid on järjestatud vastupidiselt. Esimese reapaari elemendid pärinevad lähtekarakterpolünoomist D(z). Nende alusel arvutatakse järgmise rea elemendid tabelis toodud viisil, laiendades selle järgnevalt teiseks reapaariks, mis on ühe elemendi võrra esimesest lühem. Järgmiste reapaaride arvutamine on analoogiline. Iga reapaari lühenemise tõttu lõpeb tabel viimati ära (piisab n-1 sammust). Süsteemi stabiilsuseks on vajalik ja piisav, et kõik esimese veeru tegurid λ_i oleksid ühest väiksemad ($\lambda_i < 1$).

<u>NÄIDE 5.3</u>

Antud $D(z)=z^4-1,1z^3+0,4z^2+0,2z-0,2$

Valemite 5.15 alusel saame

$F(1)=1-1,1+0,4+0,2-0,2=0,3>0$; $F(-1)=1+1,1+0,4-0,2-0,2=2,1>0$; $|D(0)|=0,2<1$.

Testitabel avaldub kujul:

	-0,2	0,2	0,4	-1,1	1
	1	-1,1	0,4	0,2	-0,2
λ_1= -0,2	-0,02	0,48	-1,06	0,96	0
	0,96	-1,06	0,48	-0,02	0
λ_2= -0,02083	0,4579	-1,05	0,9596	0	
	0,9596	-1,05	0,4579	0	
λ_3=0,4772	0,5489	0,7411	0		
	0,7411	0,5489	0		

Kõik arvutatud suurused rahuldavad stabiilsuse nõudeid, seega võib antud karaktervõrrandiga süsteemi lugeda stabiilseks.

Tegelikud süsteemi omaväärtused on:

$z_1=-0,5$ $z_2=0,702319$ $z_{3,4}=-0,44884\pm j0,60699$ $z_{M3,4}=0,75468$

5.2. OLEKUTRAJEKTOORIDE MEETOD

(*STATE SPACE TRAJECTORY METHOD*)

Olekutrajektooride meetod on ilmekas geomeetriline viis kirjeldada lineaarsete või mittelineaarsete süsteemide vabaliikumise protsesse olekuruumis tekkiva trajektoorina nulliste sisendsignaalide korral. Geomeetriline olekuruum tugineb teljestikule, millest iga telg vastab ühele olekumuutujale. Võnkumiste teooria alases kirjanduses nimetatakse sellist ruumi ka faasiruumiks, trajektoore aga faasitrajektoorideks. Trajektooride kogumi alusel saab hõlpsasti hinnata stabiilsust. Praktiliseks kasutamiseks on sobivad eeskätt kahemõõtmeliste süsteemide ülesanded, mida saab kirjeldada olekutrajektooridega tasapinnal.

Vaatleme meetodi olemust ja põhiprobleeme lihtsa mittelineaarse süsteemi näitel. Olgu antud süsteemi mudel

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_1^2\end{aligned} \qquad 5.16$$

Kõigepealt selgitame valemi 5.1 alusel tasakaalupunktid:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= 0 \Rightarrow x_2 = 0 \\ \frac{dx_2}{dt} &= 0 \Rightarrow x_1(1-x_1) = 0 \Rightarrow x_{1A} = 0;\ x_{1B} = 1\end{aligned}$$

A=(0|0); B=(1|0).

Järgnevalt analüüsime protsesse tasakaalupunktide läheduses. Lineariseerime valemi 5.10 alusel olekuvõrrandid 5.16 tasakaalupunkti A läheduses

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0;\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1; \\ &\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 1 - 2x\Big|_{x_1=0} = 1;\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0;\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} \qquad 5.17$$

Lineariseeritud süsteemi analüütiline lahend on küllalt lihtne:

$$\det\begin{bmatrix}\lambda & -1 \\ -1 & \lambda\end{bmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1); \qquad e^{At} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 \\ 1 & 1\end{bmatrix}e^{t} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1 \\ -1 & 1\end{bmatrix}e^{-t}$$

Seda küll olekutrajektooride konstrueerimiseks otseselt vaja ei lähe.

Olekutrajektoorid on väljendatavad ristkoordinaadistikus $x_1|x_2$ funktsioonina $x_2=f(x_1)$ (või vastupidi). Kõigepealt peame leidma võimaluse olekumuutujate omavahelise seose määramiseks. Selleks peab olekuvõrranditest elimineerima aja. On välja töötatud üldine meetod, mis tugineb teisendusele

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{dx_2}{dx_1} * \frac{dx_1}{dt} \Rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\frac{dx_2}{dt}}{\frac{dx_1}{dt}} \qquad 5.18$$

Viimane valem väljendab sisuliselt olekutrajektooride diferentsiaalvõrrandit, mille iga lahend teatava algpunkti korral annab teatava olekutrajektoori.

Tasakaalupunkti A lähikonnas saame 5.16 alusel

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_1}{x_2} \tag{5.19}$$

See diferentsiaalvõrrand on lahendatav vahetu integreerimisega

$$\int x_2 dx_2 = \int x_1 dx_1 \;\Rightarrow\; \frac{x_2^{\,2}}{2} = \frac{x_1^{\,2}}{2} + c \;\Rightarrow\; x_2^{\,2} - x_1^{\,2} = c_1 . \tag{5.20}$$

Nagu nähtub lahendist, on trajektoorideks kõikvõimalikud hüperboolsed jooned, kui anda konstandile c_1 erinevaid väärtusi. Trajektooride mõningane kogum on näidatud joonisel 5.3. Tegelikult läheb igast tasandi punktist läbi mingi trajektoor. Saadud pilti nimetatakse olekuportreeks (faasiportreeks). Tasakaalupunkt paikneb koordinaatide alguses. Trajektoori võrrandeist on aeg elimineeritud, kusjuures igale ajahetkele vastab kindel trajektooripunkt. Praktikas pakub huvi aja muutumise suund piki trajektoori. Suuna määramine on hõlpus, kui lähtuda algsetest lineariseeritud olekuvõrranditest 5.17 järgmiselt:

Kui $x_2 > 0$, $\Rightarrow \dfrac{dx_1}{dt} > 0$, seega t suurenedes x_1 suureneb.

Kui $x_1 > 0$, $\Rightarrow \dfrac{dx_2}{dt} > 0$, seega t suurenedes x_2 suureneb.

Mõlemad järeldused on kooskõlalised, võimaldades olekutrajektooridel näidata noolega aja kasvu suunda.

Portreelt on näha, et tasakaalupunkti suubuvad vaid kaks trajektoori (hüperboolide asümptoodid). Ajaliselt toimub see piirväärtusel $t \to \infty$ (trajektooril on see aga lõplik lõik). Kuid tasakaalupunktist väljub samuti kaks trajektoori, millest võib kohe järeldada tasakaalupunkti mittestabiilsuse (A-st väljunud kujutispunkt ei naase enam A-sse). Ülejäänud olekutrajektoorid võivad küll ajutiselt läheneda tasakaalupunktile, kuid ei suubu sinna, vaid kaugenevad lõpmatusse. Üldiselt kõik trajektoorid algavad ja lõpevad kas tasakaalupunktis või lõpmatuses. Kauged punktid aga ei paku siinkohal erilist huvi, kuna lineariseerimine säilitab täpsuse vaid tasakaalupunkti vahetus läheduses.

Teise tasakaalupunkti B ümbruses saame lineariseerimise tulemusena

$$\frac{dx_2}{dt} \approx (x_1 - x_1^{\,2})\Big|_{\substack{x_1=1\\x_2=0}} + (1-2x)\Big|_{\substack{x_1=1\\x_2=0}}(x_1 - 1) = 1 - x_1 \;\Rightarrow\; \frac{dx_1}{dt} = x_2 \tag{5.21}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 1 - x_1$$

Järelikult on trajektooride diferentsiaalvõrrand

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{1-x_1}{x_2}, \tag{5.22}$$

mida integreerides saame

$$\int x_2 dx_2 = \int (1-x_1) dx_1 \Rightarrow \frac{x_1^{\,2}}{2} + \frac{x_2^{\,2}}{2} = x_1 + C \tag{5.23}$$

Võrrand vastab ringjoonteparvele, mille keskpunkt on nihutatud koordinaatide alguse suhtes ja paikneb tasakaalupunktis. Analüüsi lihtsustamiseks kasutatakse sageli muutujate teisendamise võtet. Valides trajektooride kirjeldamisel uued muutujad nii, et koordinaatide algus paikneb tasakaalupunktis, saame

$$z_1 = x_1 - 1 \quad z_2 = x_2 \Rightarrow \begin{matrix} \dfrac{dz_1}{dt} = z_2 \\ \dfrac{dz_2}{dt} == z_1 \end{matrix} \Rightarrow \frac{dz_2}{dz_1} = -\frac{z_1}{z_2} \Rightarrow z_1^2 + z_2^2 = c_1 \qquad 5.24$$

Antud tasakaalupunkti ümber tekivad suletud ringikujulised olekutrajektoorid, mis tähendab perioodiliste ajaliste protsesside teket.

Tõepoolest, lahendades olekuvõrrandid ajavallas

$$\begin{bmatrix} \dot z_1 \\ \dot z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}; \quad \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1;$$

$$\lambda_1 = j; \; \lambda_2 = -j; \quad e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \sin t \qquad 5.25$$

saame kinnituse varasemale väitele.

Antud tasakaalupunkti puhul ei suubu ükski trajektoor tasakaalupunkti ega välju sealt. Sõltuvalt alghetke punktist tekib perioodiline protsessitrajektoor algtingimusega määratud kaugusel tasakaalupunktist. Selline tasakaalupunkt on mitteasümptootiliselt stabiilne, kusjuures perioodilisus on ilmselt seotud süsteemi imaginaarsete omaväärtuste paariga. Tasakaaluoleku ümbruses tekitab alghäiritus häiritud liikumise, mis aja suurenedes ei hääbu, kuid ei lähe ka kaugemale tasakaalupunktist, jäädes alghäiringuga (Ljapunovi definitsioonis ε) määratud δ-piirkonda (antud juhtumil $\delta=\varepsilon$).

Tulemusena näeme, et erinevad tasakaalupunktid võivad olla hoopis erisuguse iseloomuga. Sageli nimetatakse tasakaalupunkte ka singulaarpunktideks. Termin on pärit diferentsiaalvõrrandite teooriast ning asjaolust, et tasakaalupunktide tingimused 5.1 alusel tähendavad trajektoori diferentsiaalvõrrandis 5.18 olukorda

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{0}{0}$$

s.o. määramatust, mis kinnitab ka asjaolu, et ükski trajektoor ei saa läbida tasakaalupunkti (läbival trajektooril on suund olemas). Vaadeldud näited kinnitavad, et trajektooride topoloogilise iseloomu tasakaalupunkti lähikonnas määravad lineariseeritud süsteemi omaväärtused. Vastavalt uurimustele on teist järku süsteemidel neli tasakaalupunkti põhitüüpi:

1. Sõlm — kaks reaalpoolust — stabiilne sõlm $\lambda_1, \lambda_2 < 0$
   (*node*) (Im λ=0) — mittestabiilne sõlm $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

2. Fookus — komplekspooluste paar — stabiilne fookus Re $\lambda < 0$
   (*focus*) Re $\lambda \neq 0$ — mittestabiilne fookus Re $\lambda > 0$

3. Sadulpunkt — kaks erimärgilist — mittestabiilne
   (*saddle point*) reaalpoolust

4. Tsenter — imaginaarne pooluste — mitteasümptootiliselt
   (*center*) paar stabiilne

Olekuportreede tüüpilised kujud on näidatud joonisel 5.5.

Lineaarse süsteemi tasakaalupunktide liigid

Mitme tasakaalupunktiga mittelineaarse süsteemi olekuportree on tasakaalupunktide läheduses sarnane ühega joonisel 5.5 näidatuist, muus osas aga määravad portree iseloomu süsteemi võrrandite iseärasused.

Eelpool käsitletud mittelineaarse süsteemi (mudeliga 5.16) olekutrajektooride üldine diferentsiaalvõrrand avaldub kujul

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_1 - x_1^{\;2}}{x_2} \qquad 5.26$$

kusjuures olekuportreel on joonisel 5.6 näidatud kuju. Enamikul juhtudest ei ole trajektooride diferentsiaalvõrrand analüütiliselt lahendatav, seepärast tuleb põhiliseks lugeda lahendamist numbriliste meetoditega.

Valides alguspunkti, saame lahendamise tulemusena sellest punktist jätkuva olekutrajektoori. Kirjanduses tuuakse ka mitmesuguseid graafilisi meetodeid, milliseid tuleb aga vananenuiks lugeda. Joonisel 5.6 on paksema joonega esile tõstetud üks trajektoor, mida nimetatakse **separatrissiks**. See on eraldusjoon topoloogiliselt erinevate piirkondade vahel. Seespool on suletud olekutrajektoorid. Neile vastavad perioodilised protsessid, mis on mitteasümptootiliselt stabiilsed. Väljaspool separatrissi on trajektoorid, mis algavad ja lõpevad lõpmatuses, olles seega mittestabiilsed. Nagu näha, ei saa mittelineaarse süsteemi puhul enam rääkida süsteemi stabiilsusest. Siin on teatud alguspunktide piirkonnas protsessid stabiilsed, teisal aga mittestabiilsed. Keerukamal süsteemil võib erinevaid piirkondi rohkemgi olla.

Joonisel 5.7 on näidatud veidi teistsuguse mittelineaarse süsteemi

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1(1 + x_2)$$

olekuportree, millel on üksainus tsentri tüüpi tasakaalupunkt (0│0) ning sirgjooneline separatriss x_2=- 1. Loomulikult on võimalikud hoopis teistlaadi olekuportreega mittelineaarsed süsteemid.

Olgu näitena antud süsteem

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

Keeruliste avaldiste tõttu on siin otstarbeks ristkoordinaadid x_1 ja x_2 teisendada polaarkoordinaatideks ρ (pikkus) ja Θ (nurk), lähtudes seostest

$$\rho^2 = x_1^2 + x_2^2; \quad \Theta = \arctan\frac{x_2}{x_1}; \quad x_1 = \rho\cos\Theta; \quad x_2 = \rho\sin\Theta$$

Siis saame mudeli

$$\frac{d\rho^2}{dt} = 2\rho^2(1-\rho^2); \quad \frac{d\Theta}{dt} = 1 \qquad 5.27$$

Nendest seostest saame olekutrajektooride diferentsiaalvõrrandi kujul

$$\frac{d\rho^2}{d\Theta} = 2\rho^2(1-\rho^2) \qquad 5.28$$

Saadud võrrand on muutujate lahutamisega integreeritav, kusjuures tulemuseks on

$$\rho^2 = \frac{1}{1 - Ce^{-2\Theta}} \qquad 5.29$$

Siin vastab C=0 väärtusele ringjooneline trajektoor ρ=1;
C< 0 korral on ilmselt ρ<1 ning C>0 korral ρ>1.
Θ püsiva kasvu tõttu ajas (vt. valem 5.27) tekivad spiraalsed trajektoorid, mis ringjoonest ρ=1 seespool laienevad, väljaspool ringjoont aga koonduvad ringjoone poole, nagu nähtub portreelt joonisel 5.8. Hõlbus on näha, et mistahes algpunktist lähtuv spiraalne trajektoor jõuab lõppude-lõpuks asümptootiliselt ringjoonele. Viimast joont nimetatakse **piirtsükliks**, täpsemini stabiilseks piirtsükliks, mis kajastab pärast siirdeprotsessi süsteemis tekkivat püsivat võnkumisrežiimi. Stabiilsus tuleneb asjaolust, et piirtsüklist ei välju ühtki spiraali. Süsteemil on ka tasakaalupunkt $(0|0)$, mis on aga mittestabiilne (fookus). Piirtsüklile vastavaid võnkumisrežiime nimetatakse **isevõnkumisteks** (*autooscillations*).
Eksisteerivad ka süsteemid, millel esineb nii stabiilseid kui ka mittestabiilseid piirtsükleid. Piirtsükli kuju võib olla üpris mitmekesine, millele vastavad ka erisuguse võnkumiskujuga ajakõverad.

<u>NÄIDE 5.4</u>
Käsitleme üksikasjalikult osas 1.6.7 toodud mittelineaarse tunneldiood-trigeri dünaamilisi omadusi, konstrueerides olekuportree valitud tunneldioodi karakteristikutest lähtudes. Aluseks võetud tunneldioodi U-I karakteristik on kõigepealt aproksimeeritud järgneva polünoomiga:

$$i_d(u_d)=17{,}76u_d-103{,}79u_d^2+229{,}62u_d^3-226{,}31u_d^4+83{,}72u_d^5 \qquad 5.30$$

Vastav tuletispolünoom on:

$$\frac{di_d}{du_d}=17{,}76-207{,}58u_d+688{,}86u_d^2-905{,}24u_d^3+418{,}6u_d^4 \qquad 5.31$$

Muud dünaamilise mudeli parameetrid on: R=1,5kΩ; C=2pF; L=5μH.

Tasakaalurežiimid on hõlpsasti arvutatavad dünaamika võrrandeist 1.6.26 ja 1.6.27:

$$L\frac{di_D}{dt} = U_D - Ri_D - u_d$$

$$C\frac{du_d}{dt} = i_D - i_d(u_d)$$

võttes muutujate tuletised nulliks. Teine võrrand kajastab püsirežiimis lihtsalt voolude võrdsust $i_D=i_d$, kuna vool kondensaatoris puudub.

Esimesest võrrandist tuleneb seos

$$u_d=U_D-Ri_D$$

Selle seose vasak pool on määratud tunneldioodi karakteristikuga, parem pool on aga esitatav samas teljestikus kaldsirgega, mille määravad sisendpinge u_D ning valitud takistus R=1,5kΩ (joonisel täisjoonega esitatud kaldsirge vastab sisendpingele U_D=1,2V). Kõik joonisel märgistatud punktid Q_i on viimasest võrrandist tulenevad võimalikud tasakaalupunktid. Arutlus näitab, et punktid Q_2, Q_5 ja Q_7 on mittestabiilsed, ülejäänud aga stabiilsed tasakaalupunktid. Sisendpingel 1,2V saame kaks võimalikku tasakaalupunkti: Q_3 (0,884V, 0,210mA) ja Q_1 (0,0626V, 0,757mA). Kui nüüd sisendpinget vähendada, siis stabiilsed tasakaalupunktid nihkuvad väiksemate voolude suunas, kuni jõuame sisendpingel 0,659V punktipaarini Q_7 (0,513V, 0,0975mA), Q_4 (0,028V, 0,421mA), mille puhul protsess läheb hüppeliselt stabiilsesse punkti Q_4. Vastupidi, suurendades sisendpinget, jõuame sisendpingel 1,643V punktipaarini Q_5 (0,149V, 0,996mA) ja Q_6 (0,942V, 0,468mA), kus toimub analoogiline hüpe stabiilsesse punkti Q_6. Seega stabiilsed trigeri olekud paiknevad U-I karakteristiku tõusvates osades ning sisendpinge muutumisel tekivad trigerile omased küllalt suure pingeerinevusega hüpped. Võib ka veenduda, et piisavalt väikese takistuse R korral võib trigeri režiim hoopis kaduda. Tegelikud režiimid on piiratud veel tunneldioodile lubatavate suurustega.

Olekuportree koostamisel võib lähtealuseks võtta olekutrajektooride võrrandi

$$\frac{di_D}{du_D} = \frac{C(U_D - Ri_D - u_D)}{L(i_D - i_d)}, \qquad 5.32$$

mis arvestab ka induktiivseid ja mahtuvuslikke omadusi.
Arvutatud olekuportree konstantse sisendpinge U_D=1,2V korral on näidatud joonisel 5.10. Portreest ilmneb selgesti tasakaaluoleku Q_2 mittestabiilsus. Portreel on rasvase punktiiriga näidatud ka protsessi separatriss. Separatrissil paikneva algpunkti korral protsessi edasine kulg ühte kahest stabiilsest tasakaaluolekust pole determineeritult määratud. Ka protsesside kulgemiskiirused ei selgu vahetult portreelt. Sellele vaatamata on olekuportree küllalt ilmekas.

Kirjeldatud näites on arvutused mahukad, kuna tunneldioodi keeruka iseloomuga mittelineaarseid omadusi tuli aproksimeerida kõrget astet omava polünoomiga. Polünoom ise põhineb eksperimentide abil leitud karakteristikutele.

Mittelineaarsetes süsteemides võivad esineda ka bifurkatsiooninähtused, mis seoses dünaamiliste protsessidega tähendavad protsessi iseloomu äkilist kvalitatiivset muutumist süsteemi teatava parameetri sujuval muutmisel. Dünaamilise protsessi kvalitatiivset teisendumist kajastab olekuportree topoloogia kvalitatiivne muutus mingi parameetri teatava väärtuse puhul.

Süsteemi olekuportree muutusi sõltuvalt teatava parameetri λ väärtustest illustreerib joonis 5.11. Negatiivse λ väärtuse korral on tegemist stabiilse fookusega $(x_1|x_2)$- koordinaadistiku algpunktis (sumbuvad võnkumised). $\lambda=0$ puhul on sumbuvusaste vähenenud nullini ning tasakaalupunktil on tsentri iseloom. $\lambda>0$ korral esinevad püsiamplituudiga stabiilsed isevõnkumised ning koordinaatide alguspunktis paikneb mittestabiilne fookus (analoogiliselt joonisel 5.8 esitatule).

Erisuguseid bifurkatsioonivorme saab olla üpris palju. Nende lähemat analüüsi võib leida erialakirjandusest. Bifurkatsiooninähtused on tihedalt seotud katastroofinähtustega (stabiilne protsess muutub teatava parameetri väga väikese muutumise tulemusena mittestabiilseks).

Olekutrajektooride meetod on põhimõtteliselt rakendatav ka kõrgemat järku süsteemide korral, kuid praktilisi portreid saab siis kirjeldada vaid tõelise paljumõõtmelise portree projektsioonidena. Et juba 4-ndat järku süsteemi puhul tuleks korraga analüüsida 6 kahemõõtmelist projektsioonitasandit, siis muutub analüüs ebaülevaatlikuks. Seepärast rakendatakse kõrgemat järku süsteemide kirjeldamisel vaid üksikute, ilmekate projektsioonide fragmente.

Kujutuslikke raskusi illustreerib ilmekalt joonisel 5.12 esitatud neljamõõtmelise kuubi kahemõõtmeline projektsioon. Küllaltki raske on avastada isegi kõiki kolmemõõtmelisi alamkuupe.

Loomulikult on võimalik mittelineaarses süsteemis esinevaid protsesse arvutada ka süsteemi matemaatilise mudeli alusel **numbriliste meetoditega**. Raskused avalduvad eeskätt selles, et mõningat tüüpi protsessid võivad jääda hoopis märkamata või leitakse liiga ebatäpselt.

5.3. SÜSTEEMI JUHITAVUS (*SYSTEM CONTROLLABILITY*)

Süsteemi juhitavus kajastab sisendite toimet süsteemi olekutele, andes vastuse probleemile, kas sisendite abil on võimalik viia süsteemi mistahes soovitud olekusse. Seejuures ei tarvitse saavutatud olek olla süsteemi püsiolek, milline jääks püsima piiramatuks ajaks. Juhitavuse ülesanne on oluliselt erinev lineaarsete ja mittelineaarsete süsteemide korral. Kui lineaarses süsteemis mingi olekumuutuja teatav väärtus on sisendite abil saavutatav, siis on ka selle olekumuutuja mistahes muu väärtus saavutatav. Mittelineaarsel süsteemil ei tarvitse see nii olla. Edasises käsitleme lineaarse süsteemi juhitavuse probleemi.

Lineaarse süsteemi üks olekumuutuja x_i on juhitav, kui leiduvad sellised sisendsignaalid U(t), mis võimaldavad selle oleku viia lõpliku aja jooksul suvalisest algolekust $x_i(0)$ soovitud olekusse $x_i(t)$. Kui süsteemi kõik olekud on juhitavad, siis nimetatakse süsteemi täielikult juhitavaks.

Õige on ka järgmine definitsioon:

> **Süsteem on täielikult juhitav, kui on võimalik valida sellised sisendsignaalid U(t), mis võimaldavad viia süsteemi lõpliku aja kestel suvalisest algolekust vektoriga X(0) soovitud olekusse vektoriga X(t).**

Täielikult samalaadilist definitsiooni saab sõnastada ka diskreetaja süsteemide jaoks.

Juhitavuse tingimusi ongi hõlpsam analüüsida diskreetaja süsteemi jaoks. Selleks lähtume olekuvõrrandite üldlahendist 4.osa tekstis:

$$X[k] = F^k X[0] + \sum_{j=0}^{k-1} F^{k-1-j} G U[j]$$

Lahendi võime väljendada ka teisiti

$$X[k] - F^k X[0] = F^{k-1}GU[0] + F^{k-2}GU[1] + \ldots + FGU[k-2] + GU[k-1]$$

$$\underbrace{X[k] - F^k X[0]}_{\mathcal{X}_{n*1}} = \underbrace{\left[G, FG, \ldots, F^{k-2}G, F^{k-1}G\right]}_{\mathcal{Q}_{n*rk}} \underbrace{\begin{bmatrix} U[k-1] \\ U[k-2] \\ \vdots \\ U[1] \\ U[0] \end{bmatrix}}_{\mathcal{U}_{rk*1}} \qquad 5.33$$

Valemi vasakul poolel olev vektor $\mathcal{X}_{n*1}$ on juhitavusülesande formuleerimisega täpselt määratud vektor. $\mathcal{Q}_{n*rk}$ on parameetrite maatriksite kombinatsioonidest koostuv maatriks ning vektor $\mathcal{U}_{rk*1}$ hõlmab sisendite eri taktidele vastavad vektorid. Maatriksil $\mathcal{Q}$ on n rida (n on süsteemi järk) ning rk veergu, kusjuures see hulk on määratud sisendvektorite arvuga (k takti) ning igal taktil on sisendvektoril r komponenti.

Täielikuks juhitavuseks peab vektorvõrrandil 5.33

$$\mathcal{X}_{n*1} = \mathcal{Q}_{n*rk} \mathcal{U}_{rk*1} \qquad 5.34$$

leiduma lahend. Seejuures üldreeglina ei ole $\mathcal{Q}$ ruutmaatriks (n ja rk ei saagi enamasti võrduda). Paljude sisendtaktide olemasolul võib lugeda, et kehtib tingimus

$$rk \geq n \qquad 5.35$$

sest n>rk korral pole süsteem 5.33 üldse lahenduv. Lahenduvuse saavutamiseks on siis vaja suurendada sisendtaktide arvu.

Kui tingimus 5.35 on täidetud, siis $\mathcal{S}_{n*rk}$ sisaldab liigseid veerge. Kui meil õnnestub maatriksist $\mathcal{S}$ eemaldada liigsed veerud nii, et allesjäänud n veergu moodustavad pööratava maatriksi $\overline{\mathcal{S}}$, siis eemaldades vastavad read ka vektorist $\mathcal{U}$ (vt.joonist 5.13), on allesjääv maatriksvõrrand lahenduv

$$\mathcal{X} = \overline{\mathcal{S}}\overline{\mathcal{U}} \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathcal{U}} = \overline{\mathcal{S}}^{-1}\mathcal{X},$$

kusjuures lahendina saame sellised sisendvektori komponentide väärtused, mis tagavad süsteemi jõudmise soovitud olekusse X[k]. Sageli on võimalik eemaldatavaid $\mathcal{S}$ veerge ja $\mathcal{U}$ ridu valida mitmeti. Juhitavuse omaduse seisukohalt on tähtis lahendi olemasolu, selle mitmesus pole oluline. Niiviisi taandub juhitavuse probleem küsimusele, kas maatriks $\mathcal{S}$ sisaldab n sõltumatut veergu, s.o. alammaatriksi, mis on pööratav (mittenullise determinandiga). Niisugune ülesanne on lineaaralgebras hästi tuntud seoses maatriksi astaku mõistega. Maatriksil on astak w, kui leidub vähemalt üks w rea ja w veeruga ning mittenullise determinandiga alammaatriks, kuid pole ühtki w+1 järku mittenullise determinandiga alammaatriksit. Inglise keeles "astak" on "rank" ja seda kasutatakse sageli astaku sümbolina (Rank $\mathcal{S}$=w).

Nii oleme jõudnud süsteemi juhitavuse kriteeriumini kujul

$$\text{Rank}\,[G, FG, F^2G, ..., F^{n-2}G, F^{n-1}G]=n \qquad 5.36$$

<u>NÄIDE 5.5</u>

Antud süsteem:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Maatriksi $\mathcal{S}$ komponendid on:

$$FG = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \qquad F^2G = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 0 & -1 \\ -18 & -3 \end{bmatrix}$$

Seega võrrandsüsteem 5.34 omab kuju

$$\begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ x_3[k] \end{bmatrix} - F^k \begin{bmatrix} x_1[0] \\ x_2[0] \\ x_3[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 6 & 1 & -18 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1[2] \\ u_2[2] \\ u_1[1] \\ u_2[1] \\ u_1[0] \\ u_2[0] \end{bmatrix}$$

Astakut n tagavad alammaatriksid on näiteks:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -18 \end{bmatrix} = 18; \qquad \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 10 \quad \text{jne.}$$

Seega on antud süsteem täielikult juhitav.

<u>NÄIDE 5.6</u>

Süsteem: $X[k+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} X[k] + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} U[k]$; Süsteem pole juhitav, kuna

$$\text{Rank } [G, FG] = \text{Rank} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

Maatriksi astaku määramiseks on vaja leida suurimate mõõtmetega mittenulline miinor (alammaatriksi determinant). Suuremõõtmelise maatriksi puhul võib osutuda igasuguste ridade ja veergude kombinatsioonide läbiproovimine liiga töömahukaks. Astakute määramise süstemaatilised meetodid tuginevad maatriksite elementaarteisendustel, mis ei muuda astakut:

– maatriksi rea või veeru elementide korrutamine sama mittenullise arvuga (determinandi väärtus muutub, astak mitte);
– maatriksi kahe rea või veeru vahetamine (determinant muudab märki, astak säilub);
– maatriksi reale või veerule mingi arvu kordse teise rea või veeru liitmine (determinant ja astak säilivad).

Eesmärgiks on nulliste elementide hulga suurendamine. Kui sellega saab tekitada nullridu või -veerge, siis maksimaalsete miinorite otsing lihtsustub. Tuleb aga arvestada, et elementaarteisendustega võivad kaasneda ligikaudsus- või ümardamisvead, mis võivad tulemusi moonutada.

<u>NÄIDE 5.7</u>

a) Antud maatriks

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 6 & 1 & 18 & -3 \end{bmatrix}}_{\text{liidame reale 3 rea 2}} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 6 & 0 & 18 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

Ilmselt on astak 3

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & -2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -1 \\ 3 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & -2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -1 \\ 0 & -1 & -7 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -1 \\ 0 & -1 & -7 & -1 \\ 0 & -2 & -14 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1) lahutame reast 2 kahekordse rea 1
2) lahutame reast 3 kolmekordse rea 1
3) lahutame reast 4 kolmekordse rea 1
4) lahutame reast 3 rea 2 ja reast 4 kahekordse rea 2

Ilmselt on astak 2.

Pidevaja süsteemi juhitavustingimuse tuletamine on mõnevõrra keerukam, kuid tulemus on täiesti analoogiline.
Lineaarne pidevaja süsteem on täielikult juhitav, kui on täidetud tingimus

$$\text{Rank } [B, AB, A^2 B, ..., A^{n-1} B]=n. \qquad 5.37$$

Normaliseeritud olekuvõrrandite korral, kui süsteemimaatriks on diagonaalmaatriks, kehtib järgmine kriteerium:
Normaliseeritud diagonaalse süsteemimaatriksiga olekuvõrrandeid omava süsteemi täieliku juhitavuse tingimuseks on nullridade puudumine sisenditemaatriksil B (või G).

<u>NÄIDE 5.8</u>

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Süsteem on mittejuhitav nullrea tõttu.
Olekugraafist on ilmekalt näha, et sisendite abil ei saa mõjutada olekut x3 (see on mittejuhitav), kuna täielikult puuduvad pariteed sisenditest olekusse x3. Nii avaldubki olekugraafis B (või G) nullrida.
Olekugraaf on ilmekaim vahend süsteemi osalise juhitavuse iseloomu täpsustamiseks, kui teisendame olekuvõrrandid eelnevalt diagonaalkujule.

5.4. SÜSTEEMI JÄLGITAVUS (*SYSTEM OBSERVABILITY*)

Süsteemi jälgitavusomaduse sisuks on süsteemi olekute kindlakstegemine sisend- ja väljundmuutujate väärtuste kaudu. Analüüsime seda ülesannet lineaarse diskreetaja süsteemi olekuvõrrandite puhul.
Väljundvõrranditest

$$Y[k]=CX[k]+DU[k]$$

selgub, et D=0 puhul, kui väljundmuutujate arv m on võrdne olekute arvuga, s.o m=n ning väljundite maatriks on pööratav, s.o det C≠0, saame olekute vektori hõlpsasti leida

$$X[k] = C^{-1} Y[k] \qquad 5.38$$

Praktikas on aga viimane tingimus täidetud väga harva, seepärast ei ole kirjeldatud tulemusel olulist tähtsust.
Teistsuguse lahenduseni võib jõuda, kui lähtuda võrrandist, kus väljundite vektor on avaldatud olekuvõrrandi lahendi kaudu (loeme D=0, mis on sageli täidetud).

$$Y[k]=CF^kX[0] + \sum_{j=0}^{k-1} CF^{k-1-j} GU[j] \qquad 5.39$$

Siit on hõlbus näha, et olekute määramiseks peame teadma (mõõtma) nii sisendeid kui ka väljundeid. Teisalt piisab X[0] (algoleku) leidmisest, sest teades ka sisendeid, saame järgnevad olekud alati arvutada olekumudeli alusel. Väljendades nüüd võrrandi 5.39 teisiti

$$Y[k]-\sum_{j=0}^{k-1} CF^{k-1-j} GU[j] = CF^kX[0] \qquad 5.40$$

saame võrrandi, mille vasakul poolel sisalduvad ainult tuntud suurused Y ja U (kui D≠0, siis lisandub sinna veel üks tuntud liige). Paremal poolel on otsitav X[0]. Et X[0] vektoril on n komponenti, vasaku poole resulteeriv vektor aga võib omada vähem komponente, siis on vajalikud täiendavad võrrandid. Nendeks saavad olla võrrandid 5.39 ja 5.40 erinevate k väärtuste korral. See eeldab muidugi sisendite ja väljundite registreerimist mitmel ajahetkel. Maksimaalselt võime saada võrrandid

$$
\begin{array}{lll}
k=0 & Y[0] & = CX[0] \\
k=1 & Y[1]-CGU[0] & = CFX[0] \\
k=2 & Y[2]-CFGU[0]-CGU[1] & = CF^2X[0] \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
k=n-1 & Y[n-1]-\sum CF^{n-2-j}GU[j] & = CF^{n-1}X[0]
\end{array}
\qquad 5.41
$$

Jätkata uute võrrandite moodustamist, võttes k=n, n+1, **...** pole mõtet, kuna võrrand k=n ja kõik järgnevad osutuvad lineaarselt sõltuvaiks eelmisist.
Ühendades kõik avaldises 5.41 sisalduvad võrrandid üheks süsteemiks, saame

$$
\underset{mk\times 1}{\mathcal{Y}} = \underset{mk\times n}{\begin{bmatrix} C \\ CF \\ CF^2 \\ \vdots \\ CF^{N-1} \end{bmatrix}} \underset{n\times 1}{X[0]} \qquad 5.42
$$

Siin $\mathcal{Y}$ on koostatud võrrandite 5.41 vasakuid pooli ühendava vektorina, milles sisalduvad U ja Y on saadud mõõtmiste tulemusena. Süsteemi 5.42 paremal poolel paiknev maatriks on määratud süsteemi mudeli parameetrite maatriksitega. Meil on vaja leida n komponenti vektoris X[0], milleks piisab n sõltumatust võrrandist. Tegelikult on süsteemis 5.42 mk võrrandit. Neist võib osa välja jätta, eemaldades need nii $\mathcal{Y}$ komponentidest kui ka parema poole maatriksi ridadest (protsess on analoogiline osas 5.3 kirjeldatule). Tulemusena peab aga järele jääma pööratava maatriksiga võrrandisüsteem. Seega on olekute vektori X[0] leidmise eelduseks see, et 5.42 parema poole maatriks sisaldab mittenullise determinandiga $n*n$ alammaatriksi. See ongi jälgitavuse matemaatiliseks tingimuseks.
Seega saame lineaarse süsteemi täieliku jälgitavuse tingimuse esitada kujul

$$
\mathrm{Rank}\begin{bmatrix} C \\ CF \\ CF^2 \\ \vdots \\ CF^{n-1} \end{bmatrix} = n \qquad 5.43
$$

Transponeerides maatriksi (see ei muuda maatriksi astakut), saame sama tingimuse avaldada kujul

$$
\mathrm{Rank}\,[C^T, F^TC^T, (F^2)^TC^T, \dots, (F^{n-1})^TC^T] = n \qquad 5.44
$$

Saadud tulemus on täiesti analoogiline varasema süsteemi juhitavuse tingimusega 5.36. See on teataval määral üllatav, kuna sisuline eesmärk leida olekud mõõdetud sisendite ja väljundite alusel, on oluliselt erinev juhitavuse ülesande sisust.
Sarnasuse tõttu jäävad kehtima kõik juhitavuse puhul kirjeldatud astaku määramise juhised. Samuti osutub, et lineaarse pidevaja süsteemi jälgitavustingimus on analoogiliselt avaldatav kujul

$$
\mathrm{Rank}\,[C^T, A^TC^T, (A^2)^TC^T, \dots, (A^{n-1})^TC^T] = n \qquad 5.45
$$

Ainsa lisaseosena tasub juhtida tähelepanu lineaaralgebra valemile

$$(A^P)^T=(A^T)^P \qquad 5.46$$

so. transponeerimise ja astendamise operatsioonid on kommutatiivsed.
Jälgitavuse lihtsamaks määramiseks on otstarbekas teisendada olekuvõrrandid normaliseeritud kujule

$$\dot{X}(t)=\Lambda X(t)+BU(t) \qquad 5.47$$
$$Y(t)=CX(t)$$

Sel puhul osutub jälgitavuse kriteeriumiks tingimus, et C maatriksil normaliseeritud võrrandeis ei tohi olla 0-veerge.
Kasulik on seejuures kirjeldada normaliseeritud süsteemimudelit olekugraafina.

<u>NÄIDE 5.9</u>

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

Olekugraafist selgub, et x_1 ei ole jälgitav olek (samas x_2 ei ole juhitav).

Näidetes 5.8 ja 5.9 toodud olekugraafidest on ilmekalt näha, et mittejuhitava või mittejälgitava olekuga seotult tekib graafis isoleeritud (“rippuv”) mittepuutuv tuur. Arvutades graafi ülekannet selgub, et selle tuuri ülekanne ilmub tegurina nii graafi determinandi kui ka lugeja avaldisse, taandudes ülekannetest välja. Sisuliselt tähendab see ühe pooluse ja nulli väljataandumist ülekannetest. Kuna normaliseeritud olekumudel on muude mudelitega seotud ekvivalentsiteisenduse kaudu, siis nulli ja pooluse väljataandumise efekt esineb sama süsteemi mudeli mistahes esitusvormis.
Nii võime konstateerida, et mingi üksiku oleku mittejuhitavus või mittejälgitavus kajastub ülekandefunktsioonides teatava nulli ja pooluse väljataandumises ning ülekannete järk (pooluste koguarv) on madalam olekumuutujate koguarvust. Selles mõttes on osaliselt mittejuhitav või mittejälgitav süsteem ülekannete suhtes defektne. Ülekanded kajastavad ainuüksi süsteemi juhitavat ja jälgitavat osa.
Et diskreetaja süsteemi parameetrid sõltuvad taktikestuse T pikkusest, siis avaldab takti valik mõju nii juhitavusele kui ka jälgitavusele. Teatava takti T väärtuste korral täielik juhitavus või jälgitavus võib lakata olemast.

5.5. SÜSTEEMIDE DUAALSUS (*SYSTEM DUALITY*).

Juhitavuse ja jälgitavuse kriteeriumide sarnasuse tõttu on võimalik konstrueerida sugulaslike omadustega süsteemimudelite paare:

$$\underset{n\times 1}{X[k+1]} = \underset{n\times n}{F}\,\underset{n\times 1}{X[k]} + \underset{n\times r}{G}\,\underset{r\times 1}{U[k]} \qquad \underset{n\times 1}{\tilde{X}[k+1]} = \underset{n\times n}{F^T}\,\underset{n\times 1}{\tilde{X}[k]} + \underset{n\times m}{C^T}\,\underset{m\times 1}{\tilde{U}[k]} \qquad 5.48$$

$$\underset{m\times 1}{Y[k]} = \underset{m\times n}{C}\,\underset{n\times 1}{X[k]} + \underset{m\times r}{D}\,\underset{r\times 1}{U[k]} \qquad \underset{r\times 1}{\tilde{Y}[k]} = \underset{r\times n}{G^T}\,\underset{n\times 1}{\tilde{X}[k]} + \underset{r\times m}{D^T}\,\underset{m\times 1}{\tilde{U}[k]}$$

Analoogiliselt saab moodustada pidevaja süsteemimudelite paare. Paare iseloomustab see, et ühe süsteemi juhitavusomadused on identsed teise süsteemi jälgitavusomadustega ja vastupidi.

Mudelites on süsteemide

sisenditemaatriksid paarina $G \leftrightarrow C^T$;
väljunditemaatriksid paarina $C \leftrightarrow G^T$;
süsteemimaatriksid paarina $F \leftrightarrow F^T$;
otsesidemaatriksid paarina $D \leftrightarrow D^T$.

Niisuguseid süsteemipaare nimetatakse duaalseteks ja nad on muuski sarnased. Nii on neil ühesugused stabiilsusomadused ja otsesidekarakteristikud.
Duaalsusomadused pakuvad huvi mõningate juhtimissüsteemide sünteesiülesannete puhul.

5.6. SÜSTEEMIDE DEKOMPOSITSIOONIOMADUSED (*SYSTEM DECOMPOSITION*)

R. Kalman, keda loetakse süsteemide juhitavus- ja jälgitavusomaduste esmakirjeldajaks (1960), töötas välja ka üldise lineaarsete süsteemide dekompositsiooniteooria. Ta näitas, et iga süsteemi olekumudelis saab eristada 5 iseseisvat plokki (alamsüsteemi).

Üldine süsteemi dekompositsiooni plokkstruktuuri pilt on esitatud joonisel 5.16. Seda saab vaadelda kui komprimeeritud olekugraafi, kus iga plokk hõlmab teatavat liiki olekutele vastavate tippude kogumeid ning jooned esitavad kaartekimpe, mis seovad sisendeid ja väljundeid vastavate plokkidega.

Plokkide sisu on järgmine:
S_2 –juhitavad ja jälgitavad olekud (vektor X_2);
S_1 –ainult juhitavad olekud (vektor X_1);
S_4 –ainult jälgitavad olekud (vektor X_4);
S_3 –mittejuhitavad ja mittejälgitavad olekud (vektor X_3);
D –otsesideplokk (selles olekutipud puuduvad).

Samale struktuurile vastav olekuvõrrandite üldkuju on järgmine:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U \qquad Y = \begin{bmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} + DU \qquad 5.49$$

Iga maatriksplokk hõlmab parameetreid, mis kuuluvad joonisel 5.16 plokkidevahelistele kaartekimpudele või plokisiseste tippude vahelistele kaartele (vt.joonist 5.16). Õpetlik on püüda veenduda, et kui mõni maatriksi nullplokkidest sisaldaks mingi mittenullise elemendi, mis tähendab graafis (joonis 5.16) uue kaare teket, siis selle kaare algus- või lõpptipp ei saa enam paikneda senises plokis. Oleku juhitavus eeldab päritee olemasolu sisendist antud oleku tippu, jälgitavus aga seostub päriteega olekutipust väljundisse.
Dekompositsioonimudel demonstreerib ilmutatud kujul olekumudeli suuremat üldisust võrreldes ülekandemudeliga. Nagu selgus osas 5.4, on süsteemi ülekandeomadused määratud ainuüksi juhitava ja jälgitava alamsüsteemiga S_2 ning otsesideplokiga D. Kõigi muude plokkide tuuridest tulenevad süsteemi poolused taanduvad välja. Lisaks sellele ei saa sisendite abil viia

plokkide S_3 ja S_4 olekuid olekuruumi mistahes punktidesse. Samuti ei saa sisendite ja väljundite abil määrata kindlaks S_1 ja S_3 olekuid. Kõige omapärasem on mittejuhitav ja mittejälgitav plokk S_3, mis on sisendeist ja väljundeist täiesti isoleeritud. Probleemiks aga on, et selles plokis akumulatsioonidest või mittestabiilsusest tingitud protsessid saavad kanduda ka plokki S_1 ning suurte signaaliväärtuste puhul võivad tekitada kogu süsteemis olukorra, kus süsteemi esialgne lineaarne mudel ei osutu enam üldse adekvaatseks.
Kui analüüsitav süsteem ei osutu sobivaks, siis tuleb seda muuta täiendavate sisendite ja väljundite loomisega. Nende otstarbekaks valikuks ongi esialgse süsteemi dekompositsiooniline analüüs oluline.
Praktikas täheldatakse eriti majanduses nn. varjatud või pimedat majandussektorit, mis üsna ilmekalt illustreerib majandussüsteemi varjatumaid dekompositsiooniplokke. Muidugi on majandusprotsessid harva lineaarsed, mis täiendavalt komplitseerib juhitavus- ja jälgitavusomadusi. Sellest tulenevaid iseärasusi pole siinkohal võimalik käsitleda.

5.7. SÜSTEEMIDE KOMPOSITSIOON (*SYSTEM COMPOSITION*)

5.7.1. SISSEJUHATUS (*INTRODUCTION*)

Süsteemide kompositsiooni mõiste tähendab keerukamate süsteemimudelite moodustamist lihtsamate süsteemide kokkuühendamise teel. Ühendamine tähendab enamasti seda, et erinevate süsteemide teatavad muutujad on samad või siis moodustub uus muutuja, mis on nende muutujate summa. Niisuguste tingimuste realiseerumine sõltub muidugi konkreetsete süsteemide eripärast. Mõningaid kompositsioonireegleid, mis põhinevad ülekandemudelitel, vaadeldi osades 2.4 ja 2.8, kusjuures reeglid haakusid signaaligraafide kompositsiooniprintsiipidega loomulikul viisil. Käesolevas osas vaatleme olekumudeliga kirjeldatud osasüsteemide ühendusomadusi elementaarühenduste puhul.

5.7.2. JÄRJESTIKÜHENDUS (*SERIES COMPOSITION*)

Eelkõige tuleb fikseerida ühendustingimused. Joonise 5.17 plokkskeemile vastavalt on ühendustingimuseks

$$Y_1=U_{II} \quad (m_1=r_2), \qquad 5.50$$

mille puhul eeldatakse, et I süsteemi väljundite hulk on võrdne II süsteemi sisendite hulgaga ning ühendamine toimub vastavalt muutujate järjestusele vektorites (vektorite võrdsus). Muudel puhkudel tuleks võrrandeid eelkõige teisendada või ühendustingimused formuleerida kujul

$$Y_I=PU_{II}, \qquad 5.51$$

kus P on permutatsioonimaatriks, mis täpsustab ühenduskorra (permutatsioonimaatriksil on igas reas ja veerus üksainus ühikuline element, muud on nullid).
Teise põhitingimusena tuleb täpsustada ühendatud süsteemi muutujad: sisendite vektor U, väljundite vektor Y ning olekute vektor X. Järjestikühenduste korral ilmselt

$$U=U_{II}, \quad Y=Y_{II}. \qquad 5.52$$

Olekuvektori määramiseks ja muude ühendusomaduste selgitamiseks on otstarbekas kirjeldada osasüsteeme ja ühendamisseoseid olekugraafide abil. Joonisel 5.18 on ühendatud osasüsteemid esitatud komprimeeritud olekugraafina, kus ringid tähistavad üksikutele vektoritele vastavaid tipuhulki. Need on ühendatud kaartekimpudena, mille ülekanded vastavad olekumudeli parameetrite maatriksitele. Ühendusplokk P realiseerib ühendustingimust 5.51

(erijuhuna 5.50) ning sisaldab ühikulise ülekandega kaarte hulga, mis ühendavad vastavaid tippe (ühendusmaatriksiks on tingimusel 5.50 ühikmaatriks E). Graafilt on selgelt näha, et ükski olekumuutuja ühendamisel ei kao, seega ühendatud süsteemi olekuvektor X on väljendatav plokkmaatriksina

$$X=\begin{bmatrix} X_I \\ X_{II} \end{bmatrix} \qquad 5.53$$

Seejuures kaartekimpudest B_{II} ja C_I tekivad uued kaared X_I ja X_{II} vahele. Tulemusena omandavad ühendatud süsteemi olekuvõrrandid kuju

$$\frac{dX}{dt}=\begin{bmatrix} A_I & 0 \\ B_{II}C_I & A_{II} \end{bmatrix}X+\begin{bmatrix} B_I \\ 0 \end{bmatrix}U; \qquad Y=\begin{bmatrix} 0 & C_{II} \end{bmatrix}X. \qquad 5.54$$

Sama tulemuse võib saada kummagi osasüsteemi võrrandeid algebralisel teel ühendades, kui oleme selgitanud, milliseks kujuneb üldine olekuvektor. Graafimudel on mugavam eriti juhtumil, kui ühendatavate vektorite komponentide hulgad pole võrdsed. Siis ühendamata jäänud tippudest moodustuvad kas täiendavad sisendid või väljundid ja seega ühendsüsteemi sisend- ja väljundvektorid võivad moodustuda keerukamal viisil.
Ühendsüsteemi mudelist 5.54 on võimalik selgitada ühendsüsteemi üldisi omadusi.
Stabiilsus on määratud ühendsüsteemi omaväärtustega seosest

$$\det\left[sE-A\right]=0$$

mis avaldub seosena

$$\det\left[sE-A\right]=\det\left[s\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} A_I & 0 \\ B_{II}C_I & A_{II} \end{bmatrix}\right]=\det\begin{bmatrix} sE-A_I & 0 \\ -B_{II}C_I & sE-A_{II} \end{bmatrix}.$$

Maatriksalgebrast on teada valemid plokkmaatriksite pöördmaatriksite ja determinantide arvutamiseks

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ P & N \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ -N^{-1}PM^{-1} & N^{-1} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} M & Q \\ P & N \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} M^{-1}+G\Delta^{-1}F & -G\Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1}F & \Delta^{-1} \end{bmatrix}, \qquad 5.55$$

kus $\Delta=N-PM^{-1}Q$
$G=M^{-1}Q$
$F=PM^{-1}$

ning

$$\det\begin{bmatrix} M & 0 \\ P & N \end{bmatrix}=\det M\cdot\det N \qquad 5.56$$

Neist järeldub, et

$$\det\left[sE-A\right]=\det\left[sE-A_I\right]\cdot\det\left[sE-A_{II}\right]. \qquad 5.57$$

Seega on ühendatud süsteemi omaväärtusteks kummagi osasüsteemi omaväärtuste ühendatud kogum. Seega **ühendsüsteemi stabiilsus eeldab kummagi osasüsteemi stabiilsust**.
Juhitavuse analüüsiks võib saada 5.37 alusel kriteeriumi

$$\mathrm{Rank}\begin{bmatrix} B_I & A_IB_I & A_I^2B_I & \\ 0 & B_{II}C_IB_I & B_{II}C_IA_IB_I+A_{II}B_{II}C_IB_I & \cdots \end{bmatrix} \qquad 5.58$$

millest nähtub hõlpsasti, et esimene alamsüsteem peab olema juhitav, teise suhtes on aga seosed keerukamad, kuna arvestada tuleb kummagi osasüsteemi omadusi.

Arvutades ühendsüsteemi ülekandefunktsioonide maatriksi, saame

$$\mathcal{H}(s)=\begin{bmatrix}0 & C_{II}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}sE-A_I & 0\\ -B_{II}C_I & sE-A_{II}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}B_I\\ 0\end{bmatrix}=\underbrace{C_{II}(sE-A_{II})^{-1}B_{II}}_{\mathcal{H}_{II}(s)}\cdot\underbrace{C_I(sE-A_I)^{-1}B_I}_{\mathcal{H}_I(s)} \qquad 5.59$$

Osutub, et **järjestikku ühendatud süsteemi ülekandefunktsioonide maatriks $\mathcal{H}$(s) on võrdne osasüsteemide ülekandefunktsioonide maatriksite korrutisega**. Seos üldistab ühe sisendi ja ühe väljundiga osasüsteemide järjestikühenduse jaoks leitud valemit.

5.7.3. PARALLEELÜHENDUS (*PARALLEL COMPOSITION*).

Ühendustingimused on

$$U=U_I=U_{II},\quad m_I=m_{II},\qquad 5.60$$
$$Y=Y_I+Y_{II},\quad r_I=r_{II}.$$

Ilmselt on üldine olekuvektor avaldatav

$$X=\begin{bmatrix}X_I\\ X_{II}\end{bmatrix} \qquad 5.61$$

Analoogiliselt eelkirjeldatud metoodikale saame väljendada ühendsüsteemi olekuvõrrandid avaldisena

$$\frac{dX}{dt}=\begin{bmatrix}A_I & 0\\ 0 & A_{II}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_I\\ B_{II}\end{bmatrix}U \qquad Y=\begin{bmatrix}C_I & C_{II}\end{bmatrix}X \qquad 5.62$$

Järelikult on **kogusüsteemi stabiilsuseks vajalik kummagi osasüsteemi stabiilsus**. Sama kehtib nii juhitavuse kui ka jälgitavuse suhtes.

Arvutades kogusüsteemi ülekandefunktsioonide maatriksi, saame

$$\mathcal{H}(s)=\begin{bmatrix}C_I & C_{II}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}sE-A_I & 0\\ 0 & sE-A_{II}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}B_I\\ B_{II}\end{bmatrix}=\underbrace{C_I(sE-A_I)^{-1}B_I}_{\mathcal{H}_1(s)}+\underbrace{C_{II}(sE-A_{II})B_{II}}_{\mathcal{H}_2(s)} \qquad 5.63$$

Seega jääb siin kehtima reegel:

Paralleelselt ühendatud süsteemide ülekannetemaatriks on võrdne osasüsteemide ülekannetemaatriksite summaga.

5.7.4. TAGASISIDEÜHENDUS (*FEEDBACK COMPOSITION*).

Siin kehtivad ühendustingimused

$$U_1=U+Y_{II}\qquad r_1=m_2=r \qquad 5.64$$
$$Y=Y_I\qquad m_1=r_2=m$$

Olekuvektor on

$$X=\begin{bmatrix}X_I\\ X_{II}\end{bmatrix} \qquad 5.65$$

Olekuvõrrandid antud ühendusele avalduvad kujul

$$\frac{dX}{dt}=\begin{bmatrix}A_I & C_{II}B_I\\ B_{II}C_I & A_{II}\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}B_I\\ 0\end{bmatrix}U;\qquad Y=\begin{bmatrix}C_I & 0\end{bmatrix}X. \qquad 5.66$$

Saadud olekuvõrrandite analüüs on oluliselt keerulisem. Kõigepealt võivad antud kogusüsteemi omaväärtused täielikult erineda kummagi osasüsteemi omaväärtustest. Seejuures sõltub see kummagi osasüsteemi omadusist, nagu nähtub omaväärtuste võrrandist

$$\det = \begin{bmatrix} sE - A_{I} & -C_{II}B_{I} \\ -B_{II}C_{I} & sE - A_{II} \end{bmatrix} = 0 \qquad 5.67$$

Sama keerukaks kujuneb juhitavuse ja jälgitavuse analüüs, aga ka ülekandefunktsioonide maatriksi omaduste prognoosimine. Seepärast pole mingitel üldavaldistel erilist mõtet.

Tuleb rõhutada, et tagasisideühenduse võimel tekitada kogusüsteemile teistsuguseid omaväärtusi on põhimõtteline tähtsus. Kui näiteks osasüsteemi (plokid A_I, B_I, C_I) dünaamilised omadused meid ei rahulda (näiteks süsteem on mittestabiilne), siis ei pea me hakkama süsteemi ennast "remontima", vaid ühendades külge vastavalt joonisele 5.20 täiendava sobiva osasüsteemi, võime saavutada kogusüsteemile sobivad omadused. Seda võib lugeda süsteemiteooria ja -tehnika üheks olulisimatest tulemusist. Mingis mõttes kinnitab see ka printsiipi, et keerukas süsteemis on võimalikud omadused, mida lihtsamates ei õnnestu realiseerida.

Väljendades tagasisideühenduse eripära olekugraafidele omase terminoloogia kaudu võime öelda, et tagasisideühendus loob süsteemis täiendavaid suletud tuure, mis teatavasti muudavad süsteemi determinanti ja sellega ka omaväärtusi. Seega saab süsteemide dünaamilisi omadusi oluliselt muuta, tekitades süsteemis sobivate omadustega orienteeritud tuure. Seejuures muutuvad kõik süsteemi ülekanded.

5.7.5. SEGAÜHENDUSED (*MIXED COMPOSITIONS*)

Väga sageli on ühendamisviisid palju keerukamad, hõlmates osi sisendite ja väljundite vektoritest. Sellistel puhkudel on ühendustingimuste ja süsteemi ühendmudeli algebraline kirjeldamine liiga kohmakas. Samas on selliste ühendusviiside realiseerimist ja ühendmudeli moodustamist hõlbus kirjeldada olekugraafide abil. Vaatleme otstarbekat metodoloogiat konkreetse näite baasil.

<u>NÄIDE 5.10</u>

Ühendatavad süsteemid:

Süsteem A

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Süsteem B

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 9 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Ühendamistingimused: $u_3=y_2$ $u_2=y_4$

Ühendamist kirjeldav signaaligraaf on esitatud joonisel 5.21.

Ühendamistingimused on graafis kirjeldatud tippe u_3 ja y_2 ning u_2 ja y_4 siduvate graafi kaartega, mille ülekanded on 1. Nendest kaartest tekivad uued päriteed (kaarte jadad) kummagi osasüsteemi olekutippude vahele. Nende põhjal on hõlpus leida ühendsüsteemi olekumudel kujul

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -12 & -8 & 9 \\ 0 & 6 & 24 & -6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & -10 \\ 0 & 26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Saadud süsteemi karaktervõrrand on $s^5+17{,}5s^4+212{,}5s^3+1502s^2+2318s+809=0$ ja sellest tulenevalt on süsteem stabiilne. Samas oli ühendatavatest süsteemidest A mittestabiilne ja B stabiilne. Muutuste põhjuseks on uute tuuride teke ühendamisel, nagu see selgelt nähtub jooniselt 5.21.