4. LINEAARSED DISKREETAJA SÜSTEEMID
(*LINEAR DISCRETE TIME SYSTEMS*)

4.1. DISKREETAJA MÕISTE OLEMUS (*CONCEPT OF DISCRETE TIME*)

Osas 1.7.4 esitati lineaarse diskreetaja süsteemi olekuvõrrandid vektorvõrranditena

$$X[k+1]=FX[k]+GU[k] \qquad 4.1$$
$$Y[k]=CX[k]+DU[k] \qquad 4.2$$

Valitud sümbolitega tahetakse rõhutada, et väljundvõrrandi 4.2 kõik muutujad on määratud samal ajahetkel ja seepärast sobib toodud võrrand põhimõtteliselt nii diskreetaja kui ka pidevaja süsteemile. Olekuid siduv vektorvõrrand 4.1 on aga erinev, kuuludes diferentsvõrrandite klassi, kuigi diferents ilmutatud kujul võrrandis puudub. Seda asendavad diskreetide vektorid naaber-ajahetkil. Argument k (reaalarv) väljendab suhtelist aega, mille mõõtühikuks on süsteemis valitud taktikestus T. Et võrrandi kasutajal võib olla vajadus käsitleda korraga mitmeid süsteemimudeleid (näiteks koos pidevaja süsteemidega), siis pole alati mõistlik mõõta aega taktikestuse T alusel. Sel puhul kirjeldame argumenti kujul kT, kusjuures takti kestus T on määratud mingis muus ajaskaalas. Diskreetaja reljeefseks esiletõstmiseks kirjeldame argumenti nurksulgude abil. Seega [kT] tähistab k-nda taktiintervalli alghetke. Samas aga tähistus (kT) esitab hetkväärtust kT pidevaja skaalas. Diskreetaeg tähendab, et sisuline mõte on ainuüksi taktihetkedel, vahepealsed ajahetked süsteemi mudeli jaoks lihtsalt ei eksisteeri. Paljud kirjanduse allikad ajamõiste erinevust sümbolitega ei väljenda, kuigi sisuline erinevus on loomulikult olemas.

4.2. DISKREETAJA OLEKUVÕRRANDITE LAHENDAMINE
(*SOLUTION OF DISCRETE-TIME STATE EQUATIONS*)

Matemaatikas on diferentsvõrrandite lahendamiseks loodud mitmeid, sh. analüütilisi meetodeid. Need on üsna lähedased diferentsiaalvõrrandite lahendusmeetodeile, kuid praktiliseks kasutamiseks üpris kohmakad. Seepärast lahendatakse diskreetaja olekuvõrrandeid 4.1 (4.2 ei vaja lahendamist) valdavalt numbriliste meetoditega.

Lihtsaim olekuvõrrandite 4.1 lahendamismeetod on nähtavasti **rekurrentne meetod**.
Lahendamisele asumiseks peame teadma süsteemi algolekut X[0] ning iga taktihetke $k\geq0$ jaoks sisendmuutujate vektori diskreete U[k].
Kirjutame võrrandid 4.1 ja 4.2 hetke k=0 jaoks

$$k=0 \qquad X[1]=FX[0]+GU[0] \qquad Y[0]=CX[0]+DU[0] \qquad 4.3$$

Võrrandeist on leitavad X[1] ja Y[0]. Edasi

$$k=1 \qquad X[2]=FX[1]+GU[1] \qquad Y[1]=CX[1]+DU[1]$$
$$k=2 \qquad X[3]=FX[2]+GU[2] \qquad Y[2]=CX[2]+DU[2]$$

...

Igal taktil saame leida sama takti väljundi Y[k] ning järgneva oleku X[k+1].
Lahendusprotsess saab jatkuda piiramatult, kuid sisaldab numbrilistele lahendusmeetoditele tüüpilisi veaallikaid.

Teisalt on toodud lahendusskeemist hõlpus tuletada ka analüütiline lahend. Teisendades rekurrentseid avaldisi

$$X[2] = FX[1] + GU[1] = F^2X[0] + FGU[0] + GU[1] \qquad 4.4$$
$$X[3] = FX[2] + GU[2] = F^3X[0] + F^2GU[0] + FGU[1] + GU[2]$$

...

jõuame lihtsalt järgneva **analüütilise üldlahendini**

$$X[k] = F^kX[0] + \sum_{j=0}^{k-1} F^{k-1-j}GU[j] \qquad 4.5$$

Lahend on üsna lähedane pidevaja süsteemi olekuvõrrandi lahendile 3.18, kui arvestada, et maatrikseksponenti saab kirjutada ka kujul $(e^A)^t$ ning et nulloleku komponendi konvolutsiooniintegraal on siinses lahendis asendunud konvolutsioonisummaga.

Analüütiline lahend pakub huvi siis, kui on vaja arvutada mõne kaugema ajahetke olekudiskreete. Põhiprobleemiks on seejuures süsteemimaatriksi F astmete arvutamine. Sel otstarbel on hõlpus kasutada osas 3.3.3 käsitletud maatriksi spektraallahutuse meetodit, mis mittekordsete omaväärtustega F maatriksi korral tugineb valemile

$$F^k = \sum_{i=1}^{n} Z_{i1}\lambda_i^k \qquad 4.6$$

kus komponentmaatriksid Z_{i1} leitakse valemiga 3.21.

<u>NÄIDE 4.1</u>

Antud on maatriks $A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -13 & -10 & 4 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ omaväärtustega -1; -2 ja -3.

Arvutame maatriksi A_1^{10}. Kui leida 3.21 alusel komponentmaatriksid, siis saame valemi 4.6 alusel

$$A_1^{10} = \underset{(Z_{11})}{\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}}(-1)^{10} + \underset{(Z_{21})}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -5 & -3 & 2 \\ -10 & -6 & 4 \end{bmatrix}}(-2)^{10} + \underset{(Z_{31})}{\begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 9 & 6 & -3 \\ 6 & 4 & -2 \end{bmatrix}}(-3)^{10} =$$

$$= Z_{11} + 1024Z_{21} + 59049Z_{31} = \begin{bmatrix} -177\,143 & -118\,096 & 59\,048 \\ 526\,317 & 351\,220 & -175\,098 \\ 344\,058 & 230\,054 & -114\,003 \end{bmatrix}$$

Maatriksi astmete arvutamiseks on kasutatav ka Hamilton-Cayley teoreem, mis väidab, et iga maatriks rahuldab enese karaktervõrrandit. Idee rakendamist selgitame näitega.

<u>NÄIDE 4.2</u>

Olgu ülesandeks A_1^{10} arvutamine näite 4.1 maatriksile A_1 .

Karaktervõrrand avaldub

$$(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$$

Hamilton-Cayley teoreemi rakendamise idee maatriksi kõrge astme A^k arvutamiseks seisneb järgnevas. Olgu karaktervõrrand üldjuhul $P(\lambda)=0$. H-C teoreemi kohaselt kehtib ka $P(A)=0$. Jagame nüüd otsitava astme karakterpolünoomi maatriksvariandiga

$$\frac{A^k}{P(A)} = Q(A) + \frac{R(A)}{P(A)}$$

Siin Q(A) tähistab jagatist ning R(A) jagamise jääkliiget. Saadud avaldise võib esitada ka teisel kujul

$$A^k=Q(A)P(A)+R(A)$$

Et aga karaktervõrrandi alusel kehtib P(A)=0, siis saame A^k=R(A), mis ongi otsitavaks arvutusvalemiks.

Meie näite korral

$$P(A)=A^3+6A^2+11A+6E=0$$

Jagame

A^{10} | $A^3+6A^2+11A+6E$

- $\underline{A^{10}+6A^9+11A^8+6A^7}$ $\quad$ $A^7-6A^6+25A^5-90A^4+301A^3-996A^2+3025A-9330E$

$-6A^9 -11A^8 - 6A^7$

- $\underline{-6A^9 - 36A^8 - 66A^7 - 36A^6}$

$25A^8+60A^7+36A^6$

... $\quad$ $- 9330A^3-27479A^2 - 18150A$

- $\underline{- 9330A^3-55980A^2-102630A - 55980E}$

Jääkliige $\quad$ $28501A^2+84480A+55980E$

Ülaltoodu põhjal kehtib seega

$$A_1^{10}=28501A^2+84480A-55980E$$

ning arvutusega saame $A_1^{10}=\begin{bmatrix} -177143 & -118096 & 59048 \\ 526317 & 351220 & -175098 \\ 344058 & 230054 & -114003 \end{bmatrix}$

Tulemus ühtib täielikult näites 4.1 arvutatuga.

Hamilton-Cayley teoreem võimaldab lahendada ka muid maatriksitega seotud ülesandeid. Näitena tutvustame üht võimalust pöördmaatriksi arvutamiseks näite 4.1 maatriksile A1.

Teoreemi kohaselt kehtib: $A_1^3+6A_1^2+11A_1+6E=0$

Korrutame selle A_1^{-1}-ga: $A_1^2+6A_1+11E+6A_1^{-1}=0$

Siit saame valemi $A_1^{-1} = -\frac{1}{6}A_1^2 - A_1 - \frac{11}{6}E$ (kehtib vaid maatriksile A_1)

Kuna $A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -13 & -10 & 4 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$; $A_1^2 = \begin{bmatrix} -23 & -16 & 8 \\ 57 & 40 & -18 \\ 18 & 14 & -3 \end{bmatrix}$

siis saame $A_1^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 3,5 & 1,5 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

4.3. PIDEVAJA SÜSTEEMI DISKREETMUDEL
(*DISCRETE-TIME MODEL OF CONTINUOUS-TIME LINEAR SYSTEM*)

Suur osa füüsikalise maailma süsteemidest toimivad pidevajalisena, kuid nendes toimuvate protsesside kohta me saame tihti informatsiooni vaid diskreetsetel ajahetkedel tingituna mõõtevahenditest või muudel põhjustel. Seepärast pakub otsest huvi süsteemi pidevaja ja diskreetaja mudelite vaheliste seoste selgitamine, seda enam, et diskreetmudel on arvutuslikeks analüüsideks märksa otstarbekam.

Järgnevas vaatleme joonisel 4.1 näidatud struktuuriga diskreetaja mudelit. Kui diskreetsed sisendid ja väljundid on näiteks seotud arvutiga (kontrolleriga) protsessi juhtimiseks, siis peavad väljundi sidestuslülid muundama pidevaja signaalid diskreetseiks (teatava taktiga T toimiv analoog-digitaalmuundur). Sisendi poolel tuleb diskreetsed käsud muundada pidevaja signaalideks. Eeldame, et nii sisendi kui ka väljundi muundurid toimivad sama taktiperioodiga T. Sel puhul toimib süsteem U[k] ja Y[k] suhtes normaalse diskreetaja-süsteemina. Süsteemi omadustele avaldab olulist mõju diskreetse sisendsignaali pidevaks muundamise viis. Eeldame, et see toimub signaali taseme fikseerimisega takti ulatuses nii, nagu näha jooniselt 4.2.

Analüüsime nüüd protsessi pidevaja osas ühe takti kestel. Pidevaja olekuvõrrandi lahendi 3.18 alusel saame kirjutada (lugedes alghetkeks t_k)

$$X(t) = e^{A(t-t_k)}X(t_k) + \int_{t_k}^{t-t_k} e^{A\tau}BU(t-t_k-\tau)d\tau \qquad 4.7$$

millest saame oleku järgmise takti alghetkeks

$$X(t_{k+1}) = e^{AT}X(t_k) + \int_{t_k}^{t_k+T} e^{A\tau}BU(T-\tau)d\tau \qquad 4.8$$

Teisalt peab diskreetaja mudeli kohaselt kehtima

$$X[k+1]=FX[k]+GU[k]$$

Nõudes, et mõlemad mudelid peavad andma taktihetkedel identseid muutujate väärtusi, jõuame tingimusteni

$$F=e^{AT} \qquad 4.9$$

$$GU[k] = \int_{t_k}^{t_k+T} e^{A\tau}BU(T-\tau)d\tau = \int_0^T e^{A\tau}BU(T-\tau)d\tau \qquad 4.10$$

Teisendus viimases avaldises tuleneb sellest, et integreeritav suurus ei sõltu statsionaarsuse tõttu t_k väärtusest, seepärast võime võtta $t_k=0$. Kui pidevaja süsteemi sisendsignaal on takti kestel joonisele 4.2 vastavalt konstantne, siis saame

$$GU[k] = \int_0^T e^{A\tau}Bd\tau U(k) \qquad 4.11$$

millest

$$G = \int_0^T e^{A\tau}Bd\tau = \int e^{A\tau}d\tau B \qquad 4.12$$

Kui det $A \neq 0$, saame arvutada integraali

$$\int_0^T e^{A\tau} d\tau = A^{-1}(e^{AT} - E) = (e^{AT} - E)A^{-1} \qquad 4.13$$

ning siis on G arvutatav valemist

$$G=A^{-1}(e^{AT}-E)B \qquad 4.14$$

Muudel puhkudel tuleb kasutada G arvutamiseks valemit 4.12. Tulemustest on näha, et seos 4.9 kehtib alati. Järgnevad avaldised aga on otseses seoses analoogsisendi käitumisega takti kestel. Praegused valemid eeldavad analoogsisendi konstantsust takti jooksul. Kui aga analoogsisend takti kestel kuidagi muutub, siis ei tarvitse integraal valemis 4.10 olla igal taktil ühesugune ja võib üldse puududa võimalus sisendsuurust U[k] tegurina välja eraldada, mistõttu mudel ei tarvitse osutuda lineaarseks.

Eelnevast analüüsist selgub ilmekalt asjaolu, et diskreetsignaalilt analoogsignaalile üleminekul peame täpsustama signaali muutumisviisi takti ulatuses, millega me lisame mudelile uut informatsiooni. Selle tulemusena varieeruvad mingil määral ka süsteemi mudeli omadused.

<u>NÄIDE 4.3</u>

Leiame süsteemi $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & -8 \\ 60 & -26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 18 \end{bmatrix} u; \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -8 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

diskreetaja mudeli takti T=0,1 korral.

Näites 3.2 oli leitud sellise süsteemi maatrikseksponent

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 15 & -5 \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -15 & 6 \end{bmatrix} e^{-6t}$$

Valemi 4.9 alusel

$$F = e^{A\cdot 0,1} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 15 & -5 \end{bmatrix} e^{-0,2} + \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -15 & 6 \end{bmatrix} e^{-0,6} = \begin{bmatrix} 2,168 & -0,5398 \\ 4,049 & -0,8008 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -26 & 8 \\ -60 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{13}{6} & \frac{2}{3} \\ -5 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \qquad (e^{-0,2}=0,8187) \qquad (e^{-0,6}=0,5488)$$

$$G = A^{-1}(F-E)B = \begin{bmatrix} -\frac{13}{6} & \frac{2}{3} \\ -5 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,168 & -0,5398 \\ 4,049 & -1,8008 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6233 \\ 1,5949 \end{bmatrix}$$

Arvutades G valemiga 4.12, saame:

$$G = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 15 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 18 \end{bmatrix} \frac{e^{-0,2}-1}{-2} + \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -15 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 18 \end{bmatrix} \frac{e^{-0,6}-1}{-6} = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} 0,0906 + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} 0,0752 = \begin{bmatrix} 0,6190 \\ 1,5851 \end{bmatrix}$$

Tulemuste erinevus tuleneb arvutustäpsusest.

Tulemus:

$$\begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,168 & -0,5398 \\ 4,049 & -0,8008 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,623 \\ 1,585 \end{bmatrix} u[k]$$

Diskreetaja süsteemimudelit saab kasutada ka **pidevaja süsteemi protsesside numbriliseks arvutamiseks**. Sel puhul on taktikestus vabalt valitav lähtudes sellest, millise ajaintervalliga me soovime saada protsessidiskreete. Seejuures ei või unustada, et pidevaja süsteemi äsjaleitud diskreetmudel aproksimeerib sisendsignaale vastavalt joonisel 4.2 toodule. Piisavalt lühikese taktikestuse korral jääb võimalik tekkiv viga enamasti siiski piisavalt väikeseks.

4.4. IMPULSS-SÜSTEEMID (*SAMPLED SIGNAL SYSTEMS*)

Andmeedastusel, automaatjuhtimises, mõõtetehnikas ja mujalgi kasutatakse tihti niisugust informatsiooni edastusvormi, kus informatsiooni materiaalseks kandjaks on impulssjadad. Enamasti, kuigi mitte alati, on impulssjadal konstantne taktiperiood, kusjuures informatsioon kajastub impulsi teatava omaduse, näiteks amplituudi või kestuse muutumises (modulatsiooniprotsessi tulemusena). Reeglina on kasutatavate impulsside kestus tunduvalt lühem taktiperioodist. Nii saab hõlpsamini tekitada võimsaid, häireid ületavaid impulsse, või siis luuakse võimalus pakkida taktiintervalli sisse mitu sõltumatut impulssjada.

Joonisel 4.3 on näidatud perioodiline impulssjada, mille igal impulsil võib olla erinev pindala, tingituna kas amplituudi või kestuse muutumisest. Iga tavaline impulss pindalaga S_k tekitab süsteemi väljundis reaktsiooni, mida on analüüsitud osas 2.6.2 ja mis on avaldatav kujul

$$Y(t) \cong h(t-kT)S_k \qquad 4.15$$

Seega lühikese impulsi korral reaktsioon praktiliselt ei sõltu impulsi kujust.

See annab võimaluse asendada tegelik sisendsignaal analüüsis ja arvutusis sellise ekvivalentse sisendsignaaliga, mis tekitab väljundis just samasuguse reaktsiooni. Niisugune ekvivalentne sisendsignaal võib põhineda ideaalse δ-impulsi kasutamisel

$$u^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k \delta(t-kT) \qquad 4.16$$

Valemis iga järgmine δ-impulss on nihutatud taktikestuse T võrra ning pindala suurus on S_k.

Väljundis tekitavad need impulsid signaali

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k h(t-kT) \qquad 4.17$$

mida illustreerib joonis 4.4. Joonisel on impulsskaja kujuks võetud ühe negatiivse reaalpoolusega süsteemi impulsskaja. Nagu näha, pole väljundsignaal reeglina üldse impulsssignaal ning sõltuvalt süsteemi impulsskaja kujust võib osutuda isegi matemaatilises mõttes pidevaks signaaliks.

Paljudes rakendustes ei paku joonisel 4.4 nähtav väljundsignaali perioodiline pulsatsioon huvi ning mõnikord võib isegi häirivaks osutuda ja seepärast surutakse maha vastavate filtritega.

Küll aga jääb oluliseks väljundsignaali üldine muutumistendents. Sellistel puhkudel on otstarbekas üleminek diskreetaja süsteemi mudelile (joonis 4.5). Ülemineku aluseks on asjaolu, et ekvivalentne sisendsignaal u*(t) (valem 4.16) erineb nullist vaid taktihetkedel, omades seega isoleeritud hetkväärtusi, mida nimetame diskreetideks. Kui nüüd ka väljundsignaalist visata ära kõik hetkväärtused peale taktihetkele vastavate diskreetide (need on joonisel 4.4 märgistatud punktiga tipus), siis allesjääv signaal omandab kuju

$$y^*(t) = \sum_{m=0}^{\infty} y[mT]\delta(t - mT) \qquad 4.18$$

Joonisel 4.5 on diskreetsete u*(t) ja y*(t) teket illustreeritud ettekujutuslike lülititega, mis sulguksid vaid taktihetkedel. Muidugi kaotame väljundipoolel osa signaaliinformatsioonist, kuid signaali muutumise üldtendents sõltuvana sisendsignaalist säilib ühe diskreedina iga takti kohta. Kirjeldatud ideoloogia võimaldab võtta kasutusele diskreetaja mudeli, mille sisendsignaali diskreedid kajastavad tegelike impulsside pindalasid, väljundis saame aga väljaeraldatud diskreetide jada y[mT] (erinevad takti järjekorraindeksid sisendis ja väljundis osutuvad edasises vajalikuks). Joonise 4.4 ning valemi 2.34 alusel saame öelda, et iga väljunddiskreet moodustub sel hetkel väljundis tekkiva impulsskaja ning varem tekkinud impulsskajade komponentide summana, seega avaldisena

$$y[mT] = \sum_{k=0}^{m} u[kT]h[mT - kT] = \sum_{k=0}^{\infty} u[kT]h[(m - k)T] \qquad 4.19$$

Viimases avaldises on näidatud võimalus nihutada summa ülaraja lõpmatusse muutmata seejuures sisu, kuna k >m korral impulsskaja h [(m-k)T] =0.

Tulemusena oleme saanud süsteemi sisendit ja väljundit siduva diskreetaja mudeli, mille ülekandeseos 4.19 kujutab endast konvolutsioonisummat, olles pidevaja süsteemi konvolutsiooniintegraali analoogiks. Ühtlasi võib tõdeda, et varasemaid valemeid 4.16 ja 4.18 saab tõlgendada kui diskreetsuuruste kirjeldamismoodust pidevaja-skaalas. Sellega seoses on kasulik jälgida eelnevate arutluste käigus ümarsulgude (pidev ajaskaala) ning nurksulgude (diskreetne ajaskaala) kasutamist signaalide kirjeldamisel.

4.5. DISKREETNE Z-TEISENDUS (*DISCRETE Z-TRANSFORM*)

4.5.1. Z-TEISENDUSE OLEMUS (*THE Z-TRANSFORM CONCEPT*)

Olles eelmises osas jõudnud konvolutsiooniseoseni süsteemi diskreetsete sisend- ja väljundsuuruste vahel, on loomulik otsida ka ülekandefunktsiooni analoogi kasutuselevõtu võimalust.

Olgu antud mingi diskreetaja funktsioon x[kT]. Nüüd me teame, et seda on võimalik kirjeldada pidevajas kujul

$$x^*(t) = \sum x[kT]\,\delta(t - kT)$$

Püüame leida selle funktsiooni Laplace'i kujutise

$$x^*(s) = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x[kT]\,\delta(t - kT)\,e^{-st}dt = \sum_{k=0}^{\infty} x[kT] \int_0^{\infty} \delta(t - kT)\,e^{-st}dt$$

Rakendame nüüd δ-impulsi integraalset põhiomadust 2.27

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\delta(t - kT)dt = e^{-skT}$$

Tulemusena oleme jõudnud **diskreetse Laplace'i teisenduse** avaldiseni

$$x^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x[kT]e^{-skT} \qquad 4.20$$

Praktilistes rakendustes leiab sagedamat kasutamist teisenduse modifitseeritud vorm, mille võib saada valemist 4.20 asendusega

$$z = e^{sT} \qquad 4.21$$

Sellega jõuame nn. **Z-teisenduse põhivalemini**

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[kT]z^{-k} \qquad 4.22$$

On loomulik, et niiviisi saadud Z-teisendusel on Laplace'i teisendusega palju analoogilisi omadusi, kuid leidub küllaltki ka eripära.

Z-teisendusega luuakse üksühene vastavus diskreetse originaali x[kT] ja kujutise x(z) vahel, mida tähistame edasises

$$x[kT] \xleftrightarrow{z} X(z)$$

Konkreetseid vastavusi olulistele funktsioonidele saab kirjeldada vastava tabeliga. Praktilise kasutuse huvides on tabeleis 2.1 ja 2.2 funktsioonide vastavus kirjeldatud paralleelselt Laplace'i teisenduse vastavate seostega. Samas iseloomustab üks tabelitest ka teisenduste tähtsamaid omadusi.

Z-teisenduse kasutamisel on olulisimaiks iseärasusiks järgmised:

– teisendus on rakendatav diskreetaja funktsioonidele, millel kõigi ajaargumendi negatiivsete väärtuste puhul on nulline väärtus:

$$\forall k<0, \quad x[kT]=0 \qquad 4.23$$

– teisendus on lineaarne, s.o. kehtib

$$ax[kT] + by[kT] \xleftrightarrow{z} ax(z) + by(z) \qquad 4.24$$

– kujutise argument z on kompleksmuutuja

$$z = \rho + j\nu = z_M e^{j\psi} \qquad 4.25$$

mis on Laplace'i teisenduse argumendiga s=σ+jω seostatud valemiga 4.21. Sellest tulenevad seosed

$$\rho=e^{\sigma T}\cos\omega T; \quad \nu=e^{\sigma T}\sin\omega T; \quad z_M= e^{\sigma T}; \quad \psi=\omega T \qquad 4.26$$

ning $$\sigma = \frac{1}{T}\ln z_M; \quad \omega = \frac{\psi \pm 2\pi r}{T} \qquad r=0,1,2... \qquad 4.27$$

Seejuures lihtsaimad on seosed z-muutuja mooduli ja faasi ning s-muutuja reaal- ja imaginaarosa vahel.

– igale pidevaja funktsiooni Laplace'i kujutisele vastab ühene diskreetaja funktsiooni z-kujutis ahelana

$$X(s) \xleftrightarrow{L} x(t) \xrightarrow[t\to kT]{} x[kT] \xleftrightarrow{z} x(z) \qquad 4.28$$

pidev $\rightarrow$ diskreetne

Ühene vastavus suunas diskreetselt muutujalt pidevale puudub, sest võimatu on isoleeritud diskreetide alusel määrata pidevaja funktsiooni hetkväärtusi taktisisestel ajamomentidel. Mitteühesus avaldub ka kujutiste argumentide seostes, kus s-muutuja imaginaarosal ω võib olla lõpmata palju väärtusi z-muutuja argumendi (faasi) Ψ teatava väärtuse korral, nagu nähtub valemist 4.27 (teisiti öeldes, pole võimalik eristada 2π (s.o. täisringi) võrra erinevaid Ψ väärtusi).

4.5.2. Z-TEISENDUSTE ARVUTAMINE (*Z-TRANSFORM CALCULATIONS*).

Z-kujutised on valdavasti polünoomsed ratsionaalfunktsioonid, mille kordajad üldreeglina sõltuvad takti T pikkusest. Kujutiste leidmiseks kasutatakse tavaliselt tabeleid, mis mõnes käsiraamatus [15,16] on vägagi ulatuslikud. Seejuures võivad kasulikuks osutuda funktsioonide eelnevad teisendused või aditiivseteks osadeks tükeldused. Kui teame pidevaja funktsiooni L-kujutist, siis vastavust 4.28 arvestades on sobivate tabelite korral võimalik vahetult leida z-kujutis. Lisaks sellele on ratsionaalset s-kujutist hõlbus lahutada osamurdudeks ning teisendust arvutada tükati. Näiteks reaalpooluste korral on vastavus järgmine:

$$X(s) = \sum_i \frac{c_i}{s+p_i} \xrightarrow[T\ \text{teada}]{} X(z) = \sum_i \frac{c_i z}{z - e^{-p_i T}} \qquad 4.29$$

Kompleksspooluste puhul on hõlpsam kaaskompleksspooluste paar ühendada teist järku polünoomiks. Siis saame

$$X(s) = \frac{as+b}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} \xrightarrow[T\ \text{teada}]{} X(z) = \frac{az(z - e^{-\alpha T}\cos\beta T) + \dfrac{b - a\alpha}{\omega} z e^{-\alpha T}\sin\beta T}{z^2 - 2ze^{-\alpha T}\cos\beta T + e^{-2\alpha T}} \qquad 4.30$$

(poolused: $-\alpha \pm j\beta$)

Originaali leidmisel on rohkem erinevusi võrreldes Laplace'i teisendusega. Üheks spetsiifiliseks z-teisenduse eripäraks on teguri z leidumine enamiku z-kujutiste lugejas. Seepärast originaali otsimisel kujutise otsene lahutamine osamurdudeks ei vii parimal viisil sihile. Võimalikke ja mõistlikke meetodeid kirjeldame näidete varal.

<u>NÄIDE 4.4</u>

Antud: $X(z) = \dfrac{10}{(z-1)(z-0{,}5)}$.

Meetod A: Lahutame osamurdudeks $\dfrac{X(z)}{z}$.

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{10}{z(z-1)(z-0{,}5)} = \frac{20}{z} + \frac{20}{z-1} - \frac{40}{z-0{,}5} \Rightarrow X(z) = 20 + \frac{20z}{z-1} - \frac{40z}{z-0{,}5}$$

$$\updownarrow z \quad \updownarrow z \quad \updownarrow z \quad \updownarrow z$$

$$x[kT] = 20\delta[k] + 20 - 40(0{,}5)^k$$

Ajutise teguriga z-avaldise nimetajas tekitame sobiva X(z) tükelduse osamurdudeks.

Meetod B: Lahutame X(z) osamurdudeks

$$X(z) = \frac{20}{z-1} - \frac{20}{z-0,5} = z^{-1}\left(\frac{20z}{z-1} - \frac{20z}{z-0,5}\right)$$ Vajalik nihe on valemeis kujul m→ k-1

$\uparrow \qquad \updownarrow z \qquad \updownarrow z$

[Nihe ühe takti võrra] 20 - 20*0,5^m $\Rightarrow$ X[kT]=20-20*0,5$^{(k-1)}$

Lõppavaldis on kasutatav alates m=0, s.o. k ≥ 1 korral.

Väärtuse X[0] võib antud variandis saada vaid piirväärtusteoreemiga

$$X[k=0] = \lim_{z\to\infty} \frac{10}{(z-1)(z-0,5)} = 0$$

Z-teisendus võimaldab leida originaale ka numbriliselt, tuginedes z-teisenduse põhivalemile 4.22 kujul, mis sisaldab originaalfunktsiooni x[kT] järjestikuseid diskreete

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[kT]z^{-k} = x[0] + x[T]z^{-1} + x[2T]z^{-2,} + x[3T]z^{-3} + \cdots \qquad 4.31$$

Tulemuseks pole sel puhul mitte originaalfunktsiooni analüütiline avaldis, vaid järjestikuste diskreetide arvulised väärtused. Rea 4.31 leidmiseks on lihtsaim tee kujutisfunktsiooni lugeja ja nimetaja polünoomide jagamine, mida illustreerime näitega.

<u>NÄIDE 4.5</u>

Antud : $X(z) = \frac{10}{(z-1)(Z-0,5)} = \frac{10}{z^2 - 1,5z + 0,5}$

Jagame polünoomid:

```
   10            | z²-1,5z+0,5
                   10z⁻²+15z⁻³+17,5z⁻⁴+18,75z⁻⁵+ ...
-  10-15z⁻¹+5z⁻²
      15z⁻¹-5z⁻²
   -  15z⁻¹-22z⁻²+7,5z⁻³
             17,5z⁻²-7,5z⁻³
         -   17,5z⁻²-26,25z⁻³+8,75z⁻⁴
                    18,75z⁻³-8,75z⁻⁴
                         ...
```

Tulemus:

x[0]=0
x[T]=0
x[2T]=10
x[3T]=15
x[4T]=17,5
x[5T]=18,75
x[6T]=19,375
...

Hõlbus on kontrollida, et kõik kolm meetodit annavad sama lõpptulemuse võrreldavate diskreetide osas.

Z-teisendus, eriti võimalus leida originaale numbrilisel teel, võib osutuda kasulikuks ka Laplace'i teisendustele originaalide leidmisel. Valides sobiva takti T kestuse, võime leida Laplace'i kujutisele vastava Z-kujutise ning sellelt numbrilise originaali. Saadud diskreedid kirjeldavad siis valitud intervalliga Laplace'i kujutisele vastavat originaalfunktsiooni.

4.6. DISKREETNE ÜLEKANDEFUNKTSIOON

(*DISCRETE TRANSFER FUNCTION*)

Leiame diskreetaja süsteemi väljundmuutuja z-kujutise, lähtudes diskreetse konvolutsioonisumma avaldisest 4.19. Saame

$$Y(z) = \sum_{m=0}^{\infty} y[mT]z^{-m} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} u[kT]h[(m-k)T]z^{-m}$$

Valime uue muutuja n=m-k (seega m=n+k)

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} u[kT]h[nT]z^{-(n+k)} \Rightarrow Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[nT]z^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} u[kT]z^{-k} \qquad 4.32$$

Viimases avaldises on moodustunud h[nT] ja u[kT] z-kujutise avaldised. Nüüd defineerime diskreetse impulsskaja z-kujutise **diskreetseks ülekandefunktsiooniks**.

$$H(z) \xleftrightarrow{z} h[nT] \qquad H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[nT]z^{-n} \qquad 4.33$$

Tulemusena saab avaldise 4.32 väljendada kujul

$$Y(z)=H(z)U(z) \qquad 4.34$$

Seega osutub diskreetaja süsteemi ülekandefunktsioon võrdseks väljund- ja sisendmuutujate z-kujutiste suhtega analoogiliselt pidevaja süsteemi ülekandefunktsiooniga. Samuti on ülekandefunktsiooni kui kujutise originaaliks vastav impulsskaja.

Et s-kujutistele vastavad avaldise 4.28 alusel üheselt z-kujutised, mis kehtivad ka suhetes

$$u(s) \rightarrow u(z)$$
$$y(s) \rightarrow y(z)$$

siis peab kehtima ühene vastavus ka ülekandefunktsioonide jaoks

$$H(s) \xleftrightarrow{L} h(t) \xrightarrow[t \to kT]{} h[kT] \xleftrightarrow{z} H(z) \qquad 4.35$$

Seega on võimalik antud süsteemi pidevaja ülekandefunktsiooni tundes otseselt arvutada sama süsteemi diskreetne ülekandefunktsioon. Ka järeldub seosest 4.35 koos vastavustega 4.29 ja 4.30 mõlema ülekandefunktsiooni pooluste täielik vastavus, arvestades muidugi s- ja z-muutujate seost 4.21 alusel.

Kui rakendada z-teisendust diskreetaja süsteemi olekuvõrranditele, saame nullistel algtingimustel kujutisvõrrandid

$$\begin{array}{ll} X[k+1]=FX[k]+GU[k]; & Y[k]=CX[k]+DU[k] \\ \updownarrow z \quad \updownarrow z \quad \updownarrow z & \updownarrow z \quad \updownarrow z \quad \updownarrow z \\ zX(z)=FX(z)+GU(z); & Y(z)=CX(z)+DU(z) \end{array}$$

millest on hõlpus arvutada diskreetsete ülekandefunktsioonide maatriksi avaldist

$$\mathcal{H}(z)=C(zE-F)^{-1}G+D \qquad 4.36$$

See on struktuurilt täiesti analoogiline pidevaja süsteemi vastava avaldisega 3.32.

Järelikult on diskreetaja süsteemide analüüsil võimalik kasutada ülekandekarakteristikuid üpris sarnaselt pidevaja süsteemide puhul kasutatavaile, tuginedes seejuures z-teisenduse omadusile ja seostele.

Nii saame süsteemi väljundis diskreetse hüppekaja g[kT], kui anname süsteemi sisendisse diskreetse ühikhüppesignaali

$$1[kT] \xleftrightarrow{z} \frac{z}{z-1} \qquad 4.37$$

Ühikhüppesignaal avaldub ajavallas ühikuliste diskreetide jadana kõigil taktihetkedel alates k=0. Samas on diskreetse hüppekaja diskreedid võrdsed sama süsteemi pideva hüppekaja taktihetkedele vastavate hetkväärtuste jadaga.

Diskreetse impulsskaja h[kT] saamiseks tuleb süsteemi sisendisse hetkel k=0 anda üksik ühikuline diskreet δ[k], mille väärtus vastab δ-impulsi pindalale (nagu see eespool järeldus ka impulsssüsteemi mudeli arutelust).
Valemi 4.19 alusel saab diskreetset hüppekaja väljendada ka kujul

$$g[mT] = \sum_{k=0}^{\infty} h[(m-k)T] \qquad 4.38$$

mis ühtlasi kirjeldab diskreetaja süsteemi hüppekaja ning impulsskaja vahelist seost (olles pidevaja süsteemi integraalse ülekandekarakteristikute seose 2.32 analoog).

4.7. DISKREETAJA SÜSTEEMI SIIRDEPROTSESSIDE ANALÜÜS. (*PROCESS TRANSIENT ANALYSIS OF DISCRETE TIME SYSTEMS*).

Nagu pidevaja süsteemideski on ka diskreetaja süsteemide siirdeprotsessid määratud süsteemi pooluste, algoleku ja sisendsignaalidega. Ilmekalt väljendub see diskreetaja olekuvõrrandite lahendis 4.5 koos valemiga 4.6. Siirdeprotsesside üksikasjalikumaks hindamiseks on diskreetaja süsteemides otstarbekas kasutada impulsskaja h[kT], sest selle tekitab ainus ühikuline diskreet süsteemi sisendis alghetkel k=0 (vt. 4.6). Seejuures iga süsteemi poolus tekitab iseseisva impulsskaja komponendi (moodi), mida võib siis omaette analüüsida. Lisaks öeldule võime diskreetaja süsteemi protsesse käsitleda kui vastava pidevaja süsteemi protsessi graafikust eraldatud diskreetide kogumit tingimusel, et pooluste vastavus on määratud valemitega 4.26 ja 4.27.

Pidevaja süsteemi (PS) reaalpoolustele (seega $\omega=0$) vastavad alati diskreetaja süsteemi (DS) reaalpoolused ($\rho=e^{\sigma T}$, $\nu=0$). Seejuures PS positiivsele reaalpoolusele $\sigma>0$ vastab alati DS reaalpoolus $\rho>1$ ning poolusele $\sigma<0$ DS poolus $\rho<1$. Seega kõigile PS reaalpoolustele vastavad alati DS positiivsed reaalpoolused.

Kui nüüd võrrelda süsteeme lähtudes vastavate pooluste paiknemisest kahel komplekstasandil: s-tasand PS puhul ja z-tasand DS puhul (vt.joonist 4.6), siis äsja selgitasime, et s-tasandi reaaltelje punktid (vastavad poolused) on seotud z-tasandi reaaltelje positiivse poolega. Seejuures iga PS reaalpoolus tekitab impulsskaja eksponentse komponendi vastavalt joonisel 4.7 punktiiriga näidatuile. Joonisel on toodud ka DS taktiintervalliga väljaeraldatud diskreetide jada mõningad liikmed.

Kuid osutub, et samasuguse impulsskaja võib saada ka komplekssete PS pooluste puhul, kui nende imaginaarosad rahuldavad tingimust

$$\omega = \pm\frac{2\pi r}{T}, \quad r=1,2,\ldots \qquad 4.39$$

Joonisel 4.7 on näidatud taoline protsess PS puhtimaginaarse pooluse korral, kus kosinusoidaalsest mähiskõverast (vastab PS protsessile) tekivad konstantsed diskreedid, mis ühtivad äsjakäsitletud reaalpooluste juhtumiga $\sigma=0$, $\rho=1$. Ühtimise põhjus on selles, et 4.39 tingimustel z-tasandi pooluste argument (faas) $\Psi=2\pi r$ langeb täpselt reaaltelje positiivsele poolele (faasinurk moodustab täisringi). Veel selgub äsjasest arutlusest, et z-tasandi pooluste faasinurkade Ψ piiramisel rajadega +180° ja -180° vastab sellele s-tasandi piirkond vahemikus π/T kuni $-\pi/T$. Nende rajade piires kehtib s-tasandi ja z-tasandi pooluste üksühene vastavus, mis hõlbustab analüüsi. Neid rajasid nimetatakse ka s-tasandi **Nyquisti rajadeks**. Iga selle piirkonna poolusest $\pm 2\pi r/T$ võrra imaginaartelje suunas nihutatud punkt tähistab neid s-tasandi punkte (poolusi), millele vastab sama z-tasandi punkt (poolus) ja seega identne diskreetse siirdeprotsessi komponent. Suuremale imaginaarosale vastab PS kiirem võnkuv protsess analoogiliselt joonisel 4.7 näidatule, kusjuures diskreet tekib kahe või enamagi perioodi tagant. Kirjeldatud matemaatilisel nähtusel põhinevad muide üsna olulised tehnilised rakendused. Eristades näiteks kiire perioodilise protsessi igal perioodil ühe, veidi nihutatud diskreedi sobiva taktikestuse T valikuga, võime niiviisi rekonstrueerida protsessi perioodisisese muutuse iseloomu tervikuna paljude perioodide ulatuses. Seda ideed kasutavad näiteks stroboskoopostsillograafid, aga ka igasugused muud stroboskoopilised seadmed.

Kui nüüd jätkata s-tasandi ja z-tasandi pooluste ja nende tekitatud protsesside võrdlemist Nyquisti rajade piires, siis võime konstateerida, et kõigile komplekssetele s-tasandi poolustele vastavad kompleksed z-tasandi poolused. Seejuures puhtimaginaarsetele s-poolustele vastavad z-tasandi poolused ühikringil ($\sigma=0$ korral on $z_M=1$). Väljaspool ühikringi paiknevad s-tasandi parema pooltasandi poolused (positiivne reaalosa) ja ühikringi sees olevatele z-poolustele vastavad s-tasandi negatiivse reaalosaga poolused. Kuna s-tasandi parema pooltasandi poolused põhjustavad suureneva amplituudiga võnkuva siirdeprotsessi, siis samalaadselt muutuvad ka DS diskreedid. Ühikringi sees paiknevate z-pooluste puhul on tegemist kahaneva protsessiga. Joonisel 4.6 on näidatud nummerdatud punktipaaride abil üsna paljude punktide vastavus ning illustreeritud ka mõningais punktides paiknevate pooluste tekitatud impulsskaja diskreetide muutumisiseloom.

Võimalik on hinnata ka diskreetimistaktide hulka ühes võnkeperioodis. Võnkumiste suhteliselt aeglase sumbuvuse korral saab võnkumisperioodi T_p määrata seosega

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega} \tag{4.40}$$

Samas on valemi 4.27 alusel taktikestus väljendatav Nyquisti rajade piires valemiga

$$T = \frac{\Psi}{\omega}$$

Neist saab kokku valemi

$$\frac{\Psi}{2\pi} = \frac{T}{T_p} \tag{4.41}$$

Järelikult on väikese faasinurgaga Ψ z-poolustel ka taktiintervall palju väiksem võnkeperioodist, seega ühte võnkeperioodi mahub palju taktiintervalle. Mida suuremaks kasvab faasinurk, seda hõredamalt paiknevad diskreedid võnkeperioodi piires. Nyquisti piiril ($\Psi=\pi(180°)$) mahub seega igasse võnkeperioodi parajasti kaks diskreeti ehk üks diskreet poolperioodi kohta. See tähendab vahelduvmärgiliste diskreetide jada. Z-tasandil paiknevad Nyquisti piirile vastavad poolused reaaltelje negatiivsel poolel. Seega esineb diskreetaja süsteemides olukordi, kus reaalpoolustele (negatiivsetele) vastab võnkuv (vahelduvmärgiliste diskreetidega) siirdeprotsess.
Hoopis erilaadne on aga siirdeprotsess pooluse z=0 korral. Sellisele z-tasandi punktile ei vasta ühtki s-tasandi punkti ($z_M=0$ vastab $\sigma\rightarrow\infty$), järelikult pole niisugusele diskreetaja protsessile analoogi pidevaja süsteemides. Niisuguse protsessi iseärasusi käsitleme järgmises punktis konkreetse näite varal.

4.8. LÕPLIKU SIIRDEPROTSESSIGA DISKREETAJA SÜSTEEM (*DISCRETE SYSTEM WITH FINITE SETTLING TIME*)

Alustame teatava silumisalgoritmi analüüsist, mida kasutatakse näiteks juhuslikke veakomponente sisaldavate perioodiliste mõõteandmete töötlemiseks vigade vähendamise eesmärgil (vt.1.6.6). Meetod kannab jooksva keskmise algoritmi nimetust. Selle sisuks on teatava hulga viimaste mõõtetulemuste keskmise jätkuv arvutamine.
Olgu esialgsete diskreetsete mõõtetulemuste jada u[k], k=0,1,2,... . Arvutame näiteks 4 viimase mõõtmistulemuse keskmise

$$y[k] = \frac{1}{4}(u[k] + u[k-1] + u[k-2] + u[k-3]) \tag{4.42}$$

k muutmisel tekib keskmistatud suuruste diskreetjada. Suurema hulga andmete keskmistamisel on mugavam teine algoritmi variant

$$y[k] = y[k-1] + \frac{1}{4}(u[k] - u[k-4]) \tag{4.43}$$

mis on eelmise variandiga samaväärne.
Taolise algoritmi realisatsiooni võib vaadelda süsteemina, mille sisendiks on esialgsed mõõtetulemused u[k] ja väljundiks keskmistatud suurused y[k]. Niisugusele süsteemile võib arvutada ka diskreetse ülekandefunktsiooni.
Valemi 4.42 alusel saame

$$y(z) = \frac{1}{4}(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3})u(z)$$

millest tuleneb

$$H(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{z^3 + z^2 + z + 1}{4z^3} \tag{4.44}$$

Samas võib võrrandist 4.43 saada sarnasel viisil

$$H(z)=\frac{1-z^{-4}}{1-z^{-1}}=\frac{z^4-1}{4z^3(z-1)}$$

mis pärast jagamist polünoomiga z-1 osutub ekvivalentseks ülekandefunktsiooniga 4.44. Ülekandefunktsiooni H(z) põhjal võib arvutada ka impulsskaja $h[k] \xleftrightarrow{z} H(z)$. Lihtsaim on arvutada h[k] diskreedid polünoomide jagamisega

$$\frac{z^3+z^2+z+1}{4z^3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}+\frac{1}{4}z^{-3}+0z^{-4}+\cdots \qquad 4.45$$

Tulemus näitab, et impulsskajal h[k] on vaid neli esimest diskreeti ja viiendast taktist alates on kõik edasised diskreediväärtused nullid. Järelikult antud juhul kestab siirdeprotsess vaid 4 takti, olles seega selgelt lõpliku kestusega.

Hüppekaja võib leida avaldisest

$$g[k]\xleftrightarrow{z}H(z)\frac{z}{z-1} \qquad 4.46$$

mis annab tulemuseks

$$\frac{z^3+z^2+z+1}{4z^2(z-1)}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{3}{4}z^{-2}+1z^{-3}+1z^{-4}+\cdots \qquad 4.47$$

Ka siit nähtub neljataktilise kestusega siirdeprotsess, mille lõppedes jääb püsima konstantne olek ühikulise diskreediga.

Osutub, et lõpliku protsessi tekkeks peavad ülekandefunktsiooni lugeja ja nimetaja jaguma jäägita või konstantse jäägiga. Niisugune olukord tekib alati siis, kui ülekandefunktsioon sisaldab ainult nullväärtusega poolusi (nullpoolusi). Need jaguvad jäägita mistahes lugeja polünoomiga. Loomulikult võib ka pidevaja süsteemi siirdeprotsesse lugeda lõpliku ajaintervalli kestel praktiliselt lõppenuks, kuid siis on tegemist protsessi ligikaudse lõpuga. Seega lõpliku kestusega siirdeprotsessil täpses mõttes puudub analoog pidevaja süsteemide seas.

4.9. DISKREETAJA SÜSTEEMI SAGEDUSKARAKTERISTIKUD
(*FREQUENCY RESPONSE CHARACTERISTICS OF DISCRETE TIME SYSTEM*)

Sageduskarakteristikute olemust käsitleti osas 2.7. Nad väljendavad süsteemi reaktsioone ühikulisele siinussignaalile süsteemi sisendis erinevate sageduste tingimusis. Diskreetaja süsteemi sisendis peab seega toimima diskreetne siinussignaal, mis analüüsi mugavuse tõttu asendatakse kompleksse diskreetse sisendsignaaliga kujul

$$u[kT]=e^{j\omega mT} \qquad 4.48$$

Väljundsignaali saab määrata konvolutsioonisummaga valemi 4.19 alusel

$$y[mT]=\sum_{k=0}^{\infty}h[kT]e^{j\omega[(m-k)T]}=e^{j\omega mT}\sum_{k=0}^{\infty}h[kT]e^{-j\omega kT} \qquad 4.49$$

Viimane osa avaldisest 4.49 vastab diskreetse ülekandefunktsiooni H(z) avaldisele, kus z on asendunud suurusega $e^{j\omega T}$. Niisuguste omadustega suurust on loomulik nimetada diskreetseks sagedusfunktsiooniks

$$H(e^{j\omega T})=\sum_{k=0}^{\infty}h[kT]e^{-j\omega kT}=H(z)\Big|_{z=e^{j\omega T}} \qquad 4.50$$

Sagedusfunktsiooni vahendusel saab valemi 4.49 esitada kujul

$$y[mT]=H(e^{j\omega T})\,e^{j\omega mT} \qquad 4.51$$

Comment [S1]:

Comment [S2]:

Comment [S3]:

mis on analoogiline pidevaja sageduskarakteristikute avaldisele (vt. osa 2.7). Diskreetne sagedusfunktsioon on lahutatav ka mooduliks ja argumendiks (faasiks), mis vastavad amplituudi ja faasi sageduskarakteristikuile

$$H(e^{j\omega T}) = \left|H(e^{j\omega T})\right| e^{j\arg H(e^{j\omega T})} \qquad 4.52$$

On aga ka selge, et diskreetaja süsteemi sageduskarakteristikutel on olulised iseärasused. S-komplekstasandil on ju sagedust tähistaval imaginaarosal ω perioodiline iseloom piki imaginaartelge, mis viitab ka perioodilisusele süsteemi sagedusomadusis.

Püüame selgitada pidev- ja diskreetaja süsteemide sageduskarakteristikute vastavusi. Selleks tuleb tugineda Fourier' spektrite avaldistele ja omadustele. Pidevaja muutujate Fourier' spektreid esitavate avaldiste paar (Fourier' päri- ja pöördteisendus) avaldub seostega, kus H_p tähistab pidevaja süsteemi sagedusfunktsiooni

$$H_p(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \qquad 4.53$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_p(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \qquad 4.54$$

Et h(t)=0 iga t< 0 korral, siis valemis 4.53 võib integraali alumiseks rajaks võtta ka 0.
Diskreetaja süsteemi Fourier' spektri päriteisenduse valemiks on juba varem esinenud avaldis 4.50, kus alumise raja väärtuseks sobib samuti 0.
Pöördteisenduse avaldisel on üldjuhul kuju

$$h[kT] = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} H(e^{j\omega T}) e^{j\omega kT} d\omega \qquad 4.55$$

kusjuures integreerimisulatus vastab Nyquisti rajadele, kuna ω suhtes sagedusfunktsioon $H(e^{j\omega T})$ on perioodiline. Et saada h[kT] seotuks pidevaja spektriga, tuleb avaldises 4.54 võtta t→kT (diskreetida aeg) ning edasiselt summeerida spektrid kõigi perioodide ulatuses. Nii saame

Comment [S4]:

$$h[kT] = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{T}(1-2r)}^{\frac{\pi}{T}(1+2r)} H_p(j\omega) e^{j\omega kT} d\omega \qquad 4.56$$

Saadud avaldises võib muuta summeerimise ja integreerimise järjestust, püüdes seejuures avaldist lähendada seosele 4.55. Seega

$$h[kT] = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} H_p\left(j\left(\omega + \frac{2\pi}{T} r\right)\right) e^{j\omega kT} d\omega \qquad 4.57$$

Võrreldes nüüd avaldisi 4.55 ja 4.57, saame seose pidev- ja diskreetaja sagedusfunktsioonide vahel valemina

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} H_p(j(\omega + \frac{2\pi}{T} r)) \qquad 4.58$$

Saadud valem kajastab pidev- ja diskreetsüsteemi sageduskarakteristikute olulisi erinevusi, aga ka nende seotust.

Joonisel 4.8 on võrdlevalt näidatud pidevaja süsteemi (PS) ja vastava diskreetaja süsteemi (DS) sageduskarakteristikud. Kui pidevaja süsteemi sageduskarakteristikute ülekanderiba ei välju Nyquisti rajadest (kitsas riba joonisel 4.8), siis lisaks põhisagedusribale tekivad diskreetaja süsteemis kõrgematel sagedustel täiendavad läbilaskeribad, mistõttu selliseid sageduskarakteristikuid nimetatakse tihti kamm-karakteristikuteks (analoogia kammipiidega). Kui aga pidevaja süsteemi sageduskarakteristik ületab Nyquisti rajad (lai riba joonisel 4.8), siis ülekannete summeerimise tõttu (valem 4.58) diskreetaja süsteemi sageduskarakteristik omandab hoopis uue kuju. Nyquisti rajad π/T ja $-\pi/T$ on määratud valitud taktiperioodiga, seepärast pikema taktiintervalli korral tekib moonutumine hõlpsamini ja on ulatuslikum.
Kirjeldatud seosed on üpris olulised tänapäeval populaarsete nn. digitaalfiltrite kasutamisel, mis realiseeritakse diskreetaja süsteemidena.

<u>NÄIDE 4.6</u>

Lähtume ühe poolusega süsteemist, mille puhul pidevaja ülekandefunktsioon on $H(s)=b/(s+\alpha)$.
Diskreetaja ülekandefunktsioon on siis $H(z)=bz/(z-e^{-\alpha T})$.
Diskreetaja süsteemi sagedusfunktsioon avaldub

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{be^{j\omega T}}{e^{j\omega T} - e^{-\alpha T}} = \frac{b}{1-e^{-(\alpha T + j\omega T)}} = \frac{b}{1-e^{-\alpha T}(\cos\omega T - j\sin\omega T)}$$

Amplituudi sageduskarakteristik

$$\left|H(e^{j\omega T})\right| = \frac{b}{\sqrt{(1-e^{-\alpha T}\cos\omega T)^2 + e^{-2\alpha T}\sin^2\omega T}} = \frac{b}{\sqrt{1-2e^{-\alpha T}\cos\omega T + e^{-2\alpha T}}}$$

Faasi sageduskarakteristik

$$\arg H(e^{j\omega T}) = -\arctan\frac{e^{-\alpha T}\sin\omega T}{1-e^{-\alpha T}\cos\omega T} \qquad \left|H(e^{j0})\right| = \frac{b}{1-e^{-\alpha T}}$$

Pidevaja süsteemi sageduskarakteristikud

$$H_p(j\omega) = \frac{b}{\alpha + j\omega} \qquad \left|H_p(\omega)\right| = \frac{b}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}} \qquad \varphi(\omega) = -\arctan\frac{\omega}{\alpha} \qquad H(0) = \frac{b}{\alpha}$$

Diskreetaja karakteristikute graafikud: T=1 $e^{-\alpha T}=0{,}8 \rightarrow =0{,}2231$; b=1