3. LINEAARSE PIDEVAJA SÜSTEEMI OLEKUMUDEL
(STATE MODEL OF LINEAR CONTINUOUS-TIME SYSTEM)

3.1. OLEKUMUDELI ISEÄRASUSED (*MAIN FEATURES OF STATE MODEL*)

Olekumudeli põhierinevus ülekandemudelist avaldub teatavasti (vt.p.1.7.2) selles, et mudeli olekumuutujate kogum arvestab kõikvõimalikke süsteemisiseseid akumulatsioonimäärasid igal ajahetkel ning võimaldab seetõttu täielikult analüüsida vastavat süsteemi mistahes olukorras ja seejuures meelevaldsest ajahetkest t_0 alates. Teisalt on mudel suurema hulga muutujate ja parameetrite tõttu mõnevõrra keerukam. Lineaarse süsteemi matemaatiline olekumudel oli esitatud osas 1.7.2 kujul

$$\frac{d}{dt}X(t)=A(t)X(t)+B(t)U(t) \qquad 3.1$$

$$Y(t)=C(t)X(t)+D(t)U(t) \qquad 3.2$$

Vektorvõrrandite parameetermaatriksite A(t), B(t), C(t) ja D(t) elemendid võivad sõltuda ajast, rikkumata lineaarsusomadusi. Sel puhul nimetatakse süsteemi **mittestatsionaarseks**. Samas tähendab mistahes parameetri sõltuvus mingist muutujast $x_i(t)$, $y_m(t)$ või $u_k(t)$ otsekohe süsteemi mittelineaarsust.

Soovides mudeli abil analüüsida süsteemi protsesse, mida väljendavad muutujate kooskõlalised ajalised muutused, peame eelkõige teadma kõigi sisendmuutujate väärtusi (vektorit U(t)) igal ajahetkel alghetkest t_0 alates. Samuti peab teadma kõigi olekumuutujate väärtusi alghetkel, s.o. vektorit $X(t_0)$. Mittestatsionaarses süsteemis peame veel teadma süsteemimudeli kõigi parameetrite muutumise ajafunktsioone ajaskaalas, mis on ühine nii muutujaile kui ka parameetritele.

3.2. OLEKUVÕRRANDITE LAHENDAMINE
(*SOLUTION OF SYSTEM STATE EQUATIONS*)

3.2.1. HOMOGEENNE VÕRRAND
(*SOLUTION OF THE HOMOGENEOUS EQUATION*)

Süsteemi protsesside analüüs eeldab olekumudeli võrrandite lahendamist eelloetletud tingimusil. Tegelikult piisab vektorvõrrandi 3.1 lahendamisest olekuvektori X(t) suhtes, sest viimast teades on väljundmuutujad Y(t) hõlpsasti arvutatavad.

Alustuseks on otstarbekas lahendada vektorvõrrand 3.1 nn. **homogeensel** kujul, mis tähendab tingimuse U(t)=0 rahuldatust.

Sel puhul on võrrandi

$$\frac{d}{dt}X(t)=A(t)X(t) \qquad 3.3$$

lahendit otstarbekas otsida kujul

$$X(t)=\Phi(t,t_0)X(t_0) \qquad 3.4$$

mis võimaldab arvutada mistahes X(t) väärtusi tingimusel $t>t_0$. Võrrandis 3.4 esinevat maatriksfunktsiooni $\Phi(t,t_0)$ nimetatakse **olekusiirdefunktsiooniks**, kuna võrrandi 3.4 kohaselt

$\Phi(t,t_0)$ teisendab oleku $X(t_0)$ olekuks $X(t)$. Seepärast on loomulik, et olekusiirdefunktsioon sõltub kahest ajamuutujast t ja t_0. Samas ei saa $\Phi(t,t_0)$ olla teatava süsteemi korral ka meelevaldne, sest allub järgnevalt kirjeldatavaile tingimusile.
Leiame avaldise 3.4 tuletise

$$\frac{d}{dt}X(t)=\frac{d}{dt}\Phi(t,t_0)X(t_0) \qquad \text{(kuna } X(t_0) \text{ on konstant)}$$

Koos valemiga 3.3 saame

$$\frac{d}{dt}\Phi(t,t_0)X(t_0)=A(t)\Phi(t,t_0)X(t_0)$$

millest järeldub esimene tingimus

$$\frac{d}{dt}\Phi(t,t_0)=A(t)\Phi(t,t_0) \qquad 3.5$$

See tähendab, et olekusiirdemaatriks peab rahuldama süsteemi homogeenset olekuvõrrandit 3.3.

Üsna kerge on leida veel teisi olekusiirdefunktsiooni olulisi omadusi:

$$\Phi(t_0,t_0)=E \text{ (ühikmaatriks)} \qquad 3.6$$

$$\Phi(t_2,t_0)=\Phi(t_2,t_1)\Phi(t_1,t_0) \qquad 3.7$$

$$\Phi^{-1}(t_2,t_1)=\Phi(t_1,t_2) \qquad 3.8$$

Esimene omadus tuleneb otse võrrandist 3.4. Teise omaduse saame, kui vaatleme olekusiirdefunktsioone kahel järjestikusel ajalõigul $(t_0, t_1]$ ja $(t_1,t_2]$, samuti nende ajalõikude ühendil $(t_0, t_1]+(t_1,t_2]=(t_0, t_2]$. Kolmas seos tuleneb teisest juhtumil $t_2=t_0$. Viimasest selgub ühtlasi, et kõik maatriksid $\Phi(t_2,t_1)$ on pööratavad ja seega det $\Phi(t_2,t_1) \neq 0$.
On võimalik tõestada, et igale süsteemile süsteemimaatriksiga A(t) vastab üheselt määratud olekusiirdemaatriksite hulk, määratuna kõikvõimalike ajaintervallide ulatuses. Seega süsteemi homogeense võrrandi lahend kujul 3.4 sisaldab süsteemi üheselt määrava maatriksfunktsiooni $\Phi(t,t_0)$.
Samas aga osutub olekusiirdefunktsiooni $\Phi(t,t_0)$ arvutamine antud süsteemimaatriksi A(t) alusel väga keeruliseks või koguni analüütilisel kujul võimatuks (nagu kinnitab diferentsiaalvõrrandite teooria). Kõik sõltub parameetrite ajalise sõltuvuse iseloomust.

Tulemusena võib öelda, et mittestatsionaarse lineaarse süsteemi olekuvõrrandite analüütilise lahendamise asemel on otstarbekas kasutada numbrilisi diferentsiaalvõrrandite lahendusmeetodeid, olgugi et nende abil on märksa raskem selgitada süsteemile omaste protsesside üldist laadi eripärasusi.

3.2.2. STATSIONAARSE SÜSTEEMI HOMOGEENSE VÕRRANDI LAHENDAMINE (*SOLUTION OF STATSIONARY HOMOGENEOUS EQUATIONS*)

Statsionaarse süsteemi põhitunnuseks on kõigi tema parameetrite konstantsus ajas. Seetõttu võime säärase süsteemi analüüsil mistahes ajahetke võtta ajaskaala nullhetkeks. Tulemusena osutub olekusiirdefunktsioon $\Phi(t)$ ühe ajamuutuja funktsiooniks. Seejuures rahuldab $\Phi(t)$ endiselt tingimusi 3.5 kuni 3.8, kuid nüüd kujul

$$\frac{d}{dt}\Phi(t)=A\Phi(t), \qquad \Phi(t_1+t_2)=\Phi(t_1)\Phi(t_2), \qquad 3.9$$

$$\Phi(0)=E, \qquad \Phi^{-1}(t)=\Phi(-t)$$

Osutub, et kõiki neid tingimusi rahuldab **maatrikseksponent** e^{At}, mida saab esitada tavalisele eksponentfunktsioonile analoogilise mistahes reaalarvulise t korral koonduva maatriks-astmereana

$$e^{At} = E + At + A^2\frac{t^2}{2} + A^3\frac{t^3}{6} + \cdots + A^k\frac{t^k}{k!} + \cdots \qquad 3.10$$

Rea abil on hõlbus kontrollida, et valemeile 3.9 vastavalt kehtib

$$\frac{d}{dt}e^{At}=A\,e^{At};\quad e^{A0}=E;\quad e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1}e^{At_2};\quad e^{-At}=(e^{At})^{-1}$$

Tulemusena avaldub lineaarse ja statsionaarse süsteemi olekuvõrrandite 3.3 lahend U(t)=0 korral kujul

$$x(t)= e^{At}X(0) \qquad 3.11$$

seega ajaliste protsesside iseloomu määravad eksponentfunktsiooni omadused.

3.2.3. TERVIKLIKU OLEKUVÕRRANDI LAHENDAMINE
(*SOLUTION OF COMPLETE STATE EQUATIONS*)

Lihtsaim tee lahendi leidmiseks kasutab Laplace'i teisendust. Et vektori kujutist on loomulik defineerida vektori komponentide kujutistest moodustatud vektorina, siis ilmselt kehtivad seosed

$$X(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\cdots\\x_n(t)\end{bmatrix}\xleftrightarrow{L}X(s)=\begin{bmatrix}x_1(s)\\x_2(s)\\\cdots\\x_n(s)\end{bmatrix},$$

aga ka
$$\frac{dX(t)}{dt}=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\cdots\\x_n(t)\end{bmatrix}\xleftrightarrow{L}s\begin{bmatrix}x_1(s)\\x_2(s)\\\cdots\\x_n(s)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\\\cdots\\x_n(0)\end{bmatrix}=sX(s)-X(0) \qquad 3.12$$

Toodud seoseid rakendades saame luua vastavuse

$$\begin{array}{c}\dfrac{dX(t)}{dt}=AX(t)+BU(t)\\ \updownarrow L \quad \updownarrow L \quad \updownarrow L\\ sX(s)-X(0)=AX(s)+BU(s)\end{array} \qquad 3.13$$

millest teisendamisega jõuame avaldiseni

$$X(s)=(sE-A)^{-1}X(0)+(sE-A)^{-1}BU(s) \qquad 3.14$$

Võrreldes nüüd valemeid 3.11 ja 3.14 (tingimusel U(s)=0), võime leida maatrikseksponendi Laplace'i kujutise

$$e^{At}\xleftrightarrow{L}(sE-A)^{-1} \qquad 3.15$$

<u>NÄIDE 3.1</u>

Antud:

$$A=\begin{bmatrix}18 & -8\\ 60 & -26\end{bmatrix} \Rightarrow sE-A=\begin{bmatrix}s-18 & 8\\ -60 & s+26\end{bmatrix} \Rightarrow (sE-A)^{-1}=\frac{1}{(s+2)(s+6)}\begin{bmatrix}s+26 & -8\\ 60 & s-18\end{bmatrix}$$

$$\det(sE-A)=s^2+8s+12=(s+2)(s+6)$$

Tulemus: $$e^{At}=\begin{bmatrix}6e^{-2t}-5e^{-6t}; & -2e^{-2t}+2e^{-6t}\\ 15e^{-2t}-15e^{-6t}; & -5e^{-2t}+6e^{-6t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -2\\ 15 & -5\end{bmatrix}e^{-2t}+\begin{bmatrix}-5 & 2\\ -15 & 6\end{bmatrix}e^{-6t}$$

Näitest ilmneb, et maatrikseksponent väljendub eksponentfunktsioonide lineaarkombinatsioonina igas maatriksi elemendis. Eksponentide astmenäitajate tegurid osutuvad seejuures $(sE-A)^{-1}$ elementide poolusteks (nimetaja polünoomi nullkohtadeks). Viimased on aga võrrandi

$$\det(sE-A)=0 \qquad 3.16$$

lahendid, mida maatriksarvutuses nimetatakse maatriksi A **omaväärtusteks**.

Seega iseloomustavad maatrikseksponentfunktsioonide ajalist kulgu nimelt süsteemimaatriksi A omaväärtused. See on keskse tähtsusega järeldus edasiseks.

Nüüd võime asuda operaatorkujutise 3.14 teisele liikmele vastava originaali selgitamisele. See liige koosneb operaatorkujutiste korrutisest, kusjuures nende vahel on konstantne maatriks B. Viimast ei saa eemaldada, kuna maatriksite korrutis pole kommutatiivne, kuid konstandid üldiselt ei sega üleminekut originaalile. Originaal väljendub ilmselt **konvolutsiooniintegraalina**

$$(sE-A)^{-1}BU(s) \xleftrightarrow{L} \int_0^t e^{A\tau}BU(t-\tau)d\tau=\int_0^t e^{A(t-\tau)}BU(\tau)d\tau \qquad 3.17$$

mis on esitatav kahel ekvivalentsel viisil.

Tulemusena olemegi saanud **lineaarse statsionaarse süsteemi olekuvõrrandi** 3.1 **kogulahendi** analüütilises vormis

$$X(t)=\underbrace{e^{At}X(0)}_{\substack{\text{nullsisendi}\\ \text{komponent}\\ \text{(zero-input response)}}}+\underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}BU(\tau)d\tau}_{\substack{\text{nulloleku}\\ \text{komponent}\\ \text{(zero-state response)}}} \qquad 3.18$$

Olekuvõrrandi kogulahendis on tähelepanuväärseks selle lahutumine kaheks iseseisvaks osaks. Üks sõltub algolekust, kusjuures selle arvutamisel võib lähtuda tingimusest U(t)=0, millest tuleneb ka komponendi levinud nimetus **nullsisendi komponent** (*zero-input response*). Teine komponent väljendab sõltuvust sisendsignaalist U(t) ja seejuures võib eeldada nullist algolekut, millest ka nimetus **nulloleku komponent** (*zero-state response*). Sisuliselt kajastab komponentide eraldatus lineaarse süsteemi aditiivsusomadust (vt. osa 2.2).

Olekuvektorit X(t) võib ka tõlgendada kui teatavat geomeetrilist punkti n-mõõtmelises olekuruumis (n on süsteemi järk, samuti süsteemi olekute hulk). Aja muutumisel vektori komponendid muutuvad ja seega muutub ka punkti asend ruumis. Niiviisi saame olekutrajektoori, mille igale punktile vastab teatav ajahetk, kusjuures algpunktiks oli $X(t_0)$. Ainuüksi nullsisendi või nulloleku komponendi muutumine tekitab uue trajektoori. Kõigi nende

seoseid ja suhteid ilmestab trajektoorilõikude diagramm joonisel 3.1. See näitab, kuidas lahendi komponentide teatavas järjestuses arvutamisega saab kogutrajektoori konstrueerida komponenttrajektooride kombinatsioonina.
Olles leidnud olekumuutujate ajalise sõltuvuse avaldise (olekuvõrrandi lahendi), on lihtne vastav avaldis väljundmuutujaile saada valemi 3.2 alusel

$$Y(t) = Ce^{At}X(0) + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}BU(\tau)d\tau + DU(t). \qquad 3.19$$

Et statsionaarsel süsteemil on C ja D konstantsed maatriksid, siis erinevad väljundmuutujad olekumuutujaist nii nullsisendi kui ka nulloleku komponentides ning D≠0 korral ka lisaliikme poolest, mida nimetatakse **otsesidekomponendiks**, sest see kajastab sisendsignaali otseülekannet väljundisse. Seega ei põhjusta väljundmuutujate arvutus oluliselt uusi probleeme. Kõigi komponentide arvutamise põhiprobleemiks jääb ikka maatrikseksponentide arvutamine, milleks on välja töötatud mitmeid konkureerivaid meetodeid.

3.3. MAATRIKSEKSPONENDI ARVUTAMISMEETODID
(*METHODS OF MATRIX-EXPONENTIAL FUNCTION'S CALCULATION*)

3.3.1. ASTMEREA MEETOD
(*MATRIX POWER SERIES METHOD*)

Hõlpsasti realiseeritavaks maatrikseksponendi numbrilise arvutuse meetodiks on astmerea kasutamine vastavalt valemile 3.10. Nagu öeldud, koondub rida iga lõpliku t korral, kuid seejuures võib koonduvuskiirus tugevasti muutuda, vähenedes aja t kasvades. Koonduvuskiirus sõltub ka maatriksi A omadustest. Tulemuseks võivad olla vajalikud sajad või enamgi liikmed, mistõttu meetod on mugav vaid arvutis. Raskuseks on numbrilised probleemid, sest näiteks osa rea liikmeid võib osutuda vastasmärgiliseks ning lähedaste suuruste lahutamisel võib viga suureks osutuda. Numbriliste vigade tekkevõimalusi on raske avastada ja hinnata. Meetodi heaks küljeks on see, et pole vaja tunda täiendavat töömahtu vajavaid maatriksi omaväärtusi.

3.3.2. LAPLACE'I TEISENDUSE KASUTAMINE
(*LAPLACE TRANSFORM METHOD*)

Meetodi aluseks on valem 3.15, mille kasutamist illustreerib näide 3.1. Tülikam on kujutiselt originaalile üleminek, eriti kordsete pooluste korral. On loodud algoritme, mis on numbriliselt realiseeritavad (mitte küll väga lihtsalt). Algoritmides sisaldub ka omaväärtuste leidmine.

3.3.3. SPEKTRAALLAHUTUSE MEETOD (SYLVESTER-LAGRANGE VALEM)
(*MATRIX SPECTRAL EXPANSION METHOD*)

Meetod on olemuselt üldisem ja kõlbab igasuguste maatriksfunktsioonide arvutamiseks. Seejuures tuginetakse argumentmaatriksi A omaväärtuste struktuurile, mida nimetataksegi **maatriksi spektriks**.
Mittekordsete omaväärtustega maatriksi A korral on maatriksfunktsioon (näiteks e^{At}) avaldatav valemiga

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)Z_{i1}, \qquad \text{näit. } e^{At} = \sum_{i=1}^{n} Z_{i1}e^{\lambda_i t} \qquad 3.20$$

Valemi kohaselt on maatriksfunktsioon kirjeldatav komponentmaatriksitega liikmete $Z_{i1}e^{\lambda_i t}$ summana, kusjuures iga komponentmaatriks Z_{i1} vastab teatavale omaväärtusele ja on korrutatud skalaarfunktsiooniga $e^{\lambda_i t}$, mille argumendi väärtuseks on vastav omaväärtus. Komponentmaatriksite arv on võrdne maatriksite järguga ja neid saab arvutada valemiga

$$Z_{i1} = \left. \frac{\prod_{k=1}^{n}(A - \lambda_k E)}{\prod_{k=1}^{n}(\lambda_i - \lambda_k)} \right|_{k \neq i} \qquad 3.21$$

<u>NÄIDE 3.2.</u>

Antud: $A = \begin{bmatrix} 18 & -8 \\ 60 & -26 \end{bmatrix}$; $\underset{\lambda_1=-2}{Z_{11}} = \dfrac{\begin{bmatrix} 24 & -8 \\ 60 & -20 \end{bmatrix}}{-2-(-6)} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 15 & -5 \end{bmatrix}$ $\underset{\lambda_2=-6}{Z_{21}} = \dfrac{\begin{bmatrix} 20 & -8 \\ 60 & -24 \end{bmatrix}}{-6-(-2)} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -15 & 6 \end{bmatrix}$

Omaväärtused leiti näites 3.1.: -2 ja -6

Tulemus: $e^{At} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 15 & -5 \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -15 & 6 \end{bmatrix} e^{-6t}$

Näite tulemus on ilmselt identne varasema näite 3.1 tulemusega. Maatriksi kõrgema järgu puhul arvutuste keerukus kasvab, sest Z_{i1} avaldised sisaldavad maatriksite korrutisi. Samas on protseduurid standardsete operatsioonide jadana mugavalt algoritmitavad.

Spektraallahutuse meetod sisaldab ka komponentmaatriksite arvutustulemuste kontrolli-võimalusi. Selleks saab kasutada seoseid sama maatriksi erinevate komponentmaatriksite vahel, mida kirjeldavad valemid

$$\sum_{i=1}^{n} Z_{i1} = E \qquad 3.22$$

$Z^2_{i1}=Z_{i1}$ (idempotentsuse omadus) 3.23

$Z_{i1} \cdot Z_{j1}=0$ (ortogonaalsus) 3.24

Nende kasutamine kontrolliks on praktikas üsna lihtne.

Mõnevõrra keerukamaks osutub arvutus siis, kui lähtemaatriksil A on kordsed omaväärtused. Sel puhul analoogilised valemid on

$$f(A)=\sum_{i=1}^{\bar{n}} \sum_{j=1}^{m_i} f^{(j-1)}(\lambda_i) Z_{ij} \qquad 3.25$$

$$e^{At} = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{d^{j-1}}{d\lambda^{j-1}} (e^{\lambda t}) \Big|_{\lambda=\lambda_i} \cdot Z_{ij} = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \sum_{j=1}^{m_i} t^{j-1} e^{\lambda_i t} Z_{ij} \qquad 3.26$$

$$Z_{ij} = \frac{1}{(j-1)!}(A - \lambda_i E)^{j-1} Z_{i1} = \frac{1}{j-1}(A - \lambda_i E) Z_{i,j-1} \qquad 3.27$$

$Z_{i1} \cdot Z_{in}=Z_{ir}$ 3.28

$Z_{ip} \cdot Z_{lr}=0, \ l \neq i$ 3.29

$$Z_{ir}=0, \quad r>m_i \qquad 3.30$$

Valemeis tähistab m_i omaväärtuse λ_i kordsust, $\bar{n}$ aga erinevate omaväärtuste arvu. Sümbol $f^{(j-1)}$ tähistab funktsiooni j-1 järku tuletist. Valemitest tuleneb, et iga kordse omaväärtuse puhul tekib funktsiooni avaldises m_i liiget erineva komponentmaatriksiga Z_{ij} ($j=1...m_i$), kusjuures valem 3.27 annab reegli nende arvutamiseks, kui Z_{i1} on valemi 3.21 alusel juba leitud. Samuti on näha, et eksponentfunktsiooni lahutusavaldised 3.26 alusel sisaldavad lisaks tegurile $e^{\lambda_i t}$ aega t täiendava tegurina vastavas astmes t^{j-1}. Tasub aga kohe rõhutada, et teguri $t^{j-1}e^{\lambda_i t}$ piirväärtus t piiramatul kasvamisel on ikkagi null, kui λ_i on negatiivne või negatiivse reaalosaga.

3.4. SIIRDEPROTSESSIDE ANALÜÜS (*PROCESS TRANSIENT ANALYSIS*).

NÄIDE 3.3

Antud süsteem:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18 & -8\\ 60 & -26\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7\\ 18\end{bmatrix}u(t) \qquad \begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 21 & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Sisendsignaal: $u(t)=5*1(t)$

Algolek: $X[0]=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$

Maatrikseksponent: $e^{\lambda t}=\begin{bmatrix}6 & -2\\ 15 & -5\end{bmatrix}e^{2t}+\begin{bmatrix}-5 & 2\\ -15 & 6\end{bmatrix}e^{-6t}$ (arvutamine vt näide 3.2)

Olekuvõrrandite lahend:

$$X(t)=\left(\begin{bmatrix}6 & -2\\ 15 & -5\end{bmatrix}e^{-2t}+\begin{bmatrix}-5 & 2\\ -15 & 6\end{bmatrix}e^{-6t}\right)\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}+\int_0^t\left(\begin{bmatrix}6 & -2\\ 15 & -5\end{bmatrix}e^{-2(t-\tau)}+\begin{bmatrix}-5 & 2\\ -15 & 6\end{bmatrix}e^{-6(t-\tau)}\right)\begin{bmatrix}7\\ 18\end{bmatrix}5d\tau$$

$$=\underbrace{\begin{bmatrix}4\\ 10\end{bmatrix}e^{-2t}+\begin{bmatrix}-3\\ -9\end{bmatrix}e^{-6t}}_{\text{nullsisendi komponent}}+\underbrace{\begin{bmatrix}6\\ 15\end{bmatrix}e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}5d\tau+\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}e^{-6t}\int_0^t e^{6\tau}5d\tau}_{\text{nulloleku komponent}}$$

$$\downarrow$$

$$\cdots+\begin{bmatrix}15\\ 37{,}5\end{bmatrix}(1-e^{-2t})+\begin{bmatrix}0{,}833\\ 2{,}5\end{bmatrix}(1-e^{-6t})$$

$$X(t)=\underbrace{\begin{bmatrix}15{,}833\\ 40\end{bmatrix}}_{\substack{\text{püsiseisund}\\ t\to\infty}}-\begin{bmatrix}11\\ 27{,}5\end{bmatrix}e^{-2t}-\begin{bmatrix}3.833\\ -11{,}5\end{bmatrix}e^{-6t}$$

Kommentaarid:

– nullsisendi komponent sõltub ainuüksi süsteemi omadustest ning negatiivsete reaalpooluste korral muutub aja piiramatul kasvamisel asümptootiliselt nulliks. Seda võib tõlgendada nähtusena, et süsteem “unustab” algoleku. Unustamisnähtus puudub, kui süsteemil on nulline omaväärtus;

– nulloleku komponent sõltub nii süsteemi omadusist kui ka sisendsignaalidest. Mittehääbuvate sisendsignaalide korral jäävad need aja piiramatul kasvul prevaleerima ja määravad ära süsteemi püsirežiimi (-seisundi). Antud juhul konstantne sisendsignaal tekitab mittevõnkuva püsiseisundi;
– siirderežiimi kestus (aeg alghetkest püsiseisundi praktilise tekkeni) on määratud omaväärtustega analoogiliselt varasemas näites 2.2 toodud arutlusega. Praeguses süsteemis moodustab see ligikaudu 2...2,5 ajaühikut;
– positiivse (vähemalt ühe) omaväärtuse esinemisel protsessi hetkväärtused kasvavad tõkestamatult ning püsirežiimi ei teki. Suurte signaalide puhul lineaarne süsteemimudel lakkab tavaliselt kehtimast ja protsessi täpsem analüüs vajab täpsustatud mudelit;
– komplekssete omaväärtuste korral tekivad võnkuvad protsessikomponendid, mis puhtimaginaarsete omaväärtuste puhul põhjustavad võnkuva püsirežiimi tekke.

Nagu näitest selgub, on siirdeprotsessi ajalised suhted määratud süsteemi omaväärtustega, mille väärtusi määravad matemaatiliselt keerukal viisil (võrrandi 3.16 lahendite näol) süsteemi ja tema elementide parameetrid. Süsteemi parameetrite moodustumist vaatlesime osas 1.6 mitmete näidete varal.

Iga süsteemimaatriksi A omaväärtus põhjustab nulloleku ja nullsisendi komponentides iseseisva aditiivse komponendi, nagu parimini selgub maatrikseksponendi spektraallahutusest 3.20 (3.26). Neid komponente nimetatakse eriti ingliskeelses kirjanduses sageli **protsessi moodideks.** Moodide lineaarne sõltumatus võimaldab näiteks püsirežiimi jõudmise ajaintervalli analüüsida ühe, kõige aeglasemalt koonduva moodi analüüsi alusel, jättes teised täiesti kõrvale.
Kirjanduses on kasutusel nullsisendi komponendi nimetusena ka süsteemi **vabakomponent**, mis tähendab selle protsessikomponendi täielikku sõltumatust sisendi välistoimest. Samas nimetatakse nulloleku komponenti ka protsessi **sundkomponendiks**, rõhutades selle komponendi otsest sõltuvust sisendsignaalidest. Jätkuva sisendsignaali korral vabakomponent tavaliselt hääbub (nagu ka näites 3.3) ning püsirežiimile jõudes säilib vaid sundkomponent.

Praktiliste ülesannete lahendamisel on tänapäeval võimalik arvutustel kasutada numbrilisi algoritme rakendavaid tarkvarasüsteeme (näiteks MATLAB). Samas on ka analüütilisel lahendil tunnetuslik tähtsus. Mõistes, kuidas ja milliste karakteristikute najal kujunevad välja süsteemide dünaamilised protsessid, saame hinnata, milliseid ajalõike hõlmavad siirdeprotsessid, millistel tingimustel kujunevad välja püsiolekud ja püsirežiimid ja mis laadi on protsessimoodid. Kõike seda on vaja teada protsessiarvutuste optimaalseks realiseerimiseks.

3.5. OLEKUMUDELI JA ÜLEKANDEMUDELI SEOSED (*RELATIONS BETWEEN STATE MODEL AND TRANSFER FUNCTIONS*)

Nullise algoleku korral peab olekumudel olema lähedane ülekandemudelile. Tõepoolest, kui võrrandile 3.14

$$X(s)=(sE-A)^{-1}X(0)+(sE-A)^{-1}BU(s)$$

liita väljundvõrrandi 3.2 operaatorkujutis

$$Y(s)=CX(s)+DU(s) \qquad 3.31$$

siis tingimusel X(0)=0 saame avaldise

$$\mathcal{H}(s)=C(sE-A)^{-1}B+D \qquad 3.32$$

See esitab maatriksit, mille iga element on teatava sisendi ja väljundi vaheline ülekandefunktsioon. Mõõtudega $m*r$ maatriksit $\mathcal{H}(s)$ nimetatakse **ülekandefunktsioonide maatriksiks** (*transfer function matrix*), kusjuures avaldis 3.32 kajastab ka ülekandefunktsioonide seotust olekumudeli parameetrite maatriksitega.
Ülekandefunktsioonide maatriksi avaldise 3.32 alusel, arvestades seost 3.15, on hõlbus saada ka valem **impulsskajade maatriksile** ($<\delta(t)>$ tähendab impulsskajade vektorit)

$$\mathcal{H}(t)=Ce^{At}B+D<\delta(t)> \qquad 3.33$$

aga ka **hüppekajade maatriksile**

$$G(t)=CA^{-1}(e^{At}-E)B+D \qquad 3.34$$

Neist esimene on saadud üleminekuga operaatorkujutistelt originaalidele, teine aga integreerimise tulemusena.

<u>NÄIDE 3.4</u>

Antud on näite 3.3 süsteem: $A=\begin{bmatrix}18 & -8\\ 60 & -26\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}7\\ 18\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 21 & -8\end{bmatrix}$; $D=0$

Kasutades näitest 3.1 $(sE-A)^{-1}$ avaldist, saame

$$\mathcal{H}(s)=\frac{1}{(s+2)(s+6)}\begin{bmatrix}0 & 2\\ 21 & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+26 & -8\\ 60 & s-18\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\ 18\end{bmatrix}=\frac{1}{(s+2)(s+6)}\begin{bmatrix}36s+192\\ 3s+30\end{bmatrix}$$

$$H_{11}(s)=\frac{y_1}{u}=\frac{36s+192}{(s+2)(s+6)}; \qquad H_{21}(s)=\frac{y_2}{u}=\frac{3s+30}{(s+2)(s+6)}$$

Avaldis 3.32 ning näide 3.4 võimaldavad teha mitmeid olulisi järeldusi ülekandefunktsioonide omaduste kohta:

a) Ühe ja sama süsteemi kõigi ülekandefunktsioonide nimetajad on ühesugused, kuna nimetaja tekib pöördmaatriksi $(sE-A)^{-1}$ ühisest nimetajast $\det(sE-A)$.
Et nimetaja nullkohad on ülekandefunktsiooni poolused, siis on süsteemi kõigil ülekandefunktsioonidel samasugused poolused. Tõsi, võib juhtuda, et mõni lugeja nullkoht langeb poolusega kokku ja taandub hoopiski välja. Sel puhul pooluste üldarv väheneb. Tuleb muidugi arvestada, et poolused sõltuvad ainult maatriksist A, nullid aga ka parameetritest maatriksites B ja C. Et reaalse süsteemi parameetrid on teada vaid veatolerantsi piires, siis täpse väljataandumise otsustus on tegelikkuses üsna ebakindel.

b) Ülekandefunktsioonide pooluste leidmise avaldis on identne süsteemimaatriksi A omaväärtuste määramise avaldisega 3.16. Seega on süsteemi omaväärtused ja ülekandefunktsioonide poolused identsed.

c) Nullise otsesidemaatriksi D=0 korral (vt. näide 3.4) on ülekandefunktsioonide lugeja polünoomid vähemalt ühe järgu võrra madalamad nimetaja polünoomi järgust (sest tekivad algebralistest täienditest maatriksi pööramisel). See tähendab, et ülekandefunktsiooni nulle on vähem kui poolusi.

d) Otsesidemaatriksi olemasolul ($D\neq 0$) liitub see konstantse maatriksina valemi 3.32 alusel ülekandefunktsioonidele. Tulemusena ülekandefunktsioonide lugeja ja nimetaja polünoomide järgud, seega ka nullide ja pooluste koguarvud saavad olla võrdsed.

e) P. c ja d analüüsidest tuleneb, et ülekandefunktsioonidel ei saa kunagi olla enam nulle kui poolusi. Ühtlasi osutub, et otsesidemaatriks D esineb vaid selliste süsteemide olekumudelites, mille ülekandefunktsioonil on samavõrra nulle ja poolusi. Sellise omaduse üheks järelduseks, mis tuleneb ülekandekarakteristikutega seotud piirteoreemidest (vt. osad 2.6.1 ja 2.6.2), on asjaolu, et järsk muutus süsteemi sisendis kandub hetkeliselt väljundile. Õigupoolest sellises nähtuses ilmnebki otseside olemus.

3.6. OLEKUMUUTUJATE TEISENDAMINE.
(TRANSFORMATIONS OF STATE VARIABLES).

Olekumuutujad on teatavasti sellised muutujad, mis kogumina arvestavad igal ajahetkel kõiki süsteemisiseseid akumulatsioone. See ei tähenda tingimata seda, et iga muutuja kirjeldab teatavat spetsiifilist akumulatsioonimäära. Igasugune n muutuja (n on süsteemi järk) kogum, mis on üks-üheses vastavuses esialgsete olekumuutujatega, võib olekumuutujaid ka ekvivalentsena asendada. See tähendab, et olekumuutujate vektori X(t) võime asendada sama arvu muutujaid omava vektoriga Z(t), kui leidub selline arvmaatriks T niisugusena, et

$$X(t)=TZ(t), \qquad Z(t)=T^{-1} X(t) \tag{3.35}$$

Asendades X(t) statsionaarseis olekuvõrrandeis

$$T\dot{Z}(t)=ATZ(t)+BU(t)$$
$$Y(t)=CTZ(t)+DU(t)$$

saame siit uued olekuvõrrandid

$$\dot{Z}(t) = \hat{A}Z(t) + \hat{B}U(t), \tag{3.36}$$

$$Y(t) = \hat{C}Z(t) + \hat{D}U(t), \tag{3.37}$$

kus parameetrite maatriksid $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C},$ ja $\hat{D}$ on seotud esialgsete parameetrite maatriksitega kujul

$$\hat{A} = T^{-1}AT \tag{3.38}$$

$$\hat{B} = T^{-1}B \tag{3.39}$$

$$\hat{C} = CT \tag{3.40}$$

$$\hat{D} = D \tag{3.41}$$

Tulemusena saame teistsuguse olekuvõrrandite kogumi, mis peab ilmselt olema suguluses esialgsete olekuvõrranditega, sest süsteem osutub ju endiseks. Avaldis 3.41 näitab kohe, et otsesidemaatriks ei muutu. Kerge on ka näha, et kehtivad seosed

$$\det\hat{A} =\det(T^{-1} AT)=\det T^{-1}*\det A*\det T=\det A, \text{ kuna } \det T^{-1}=(\det T)^{-1} \tag{3.42}$$

$$\det(sE-\hat{A})=\det(sE-T^{-1}AT)=\det(sT^{-1}T-T^{-1}AT)=\det(T^{-1} (sE-A)T)=$$
$$=\det T^{-1}(sE-A) \det T=\det(sE-A) \tag{3.43}$$

Seosest 3.43 tuleneb, et süsteemimaatriksitel A ja $\hat{A}$ on samad omaväärtused. Lineaaralgebras teisendusega 3.38 seotud maatrikseid nimetatakse **sarnasteks**, kusjuures sarnastel maatriksitel on ühesugused omaväärtused, determinandid ja samad jäljed (peadiagonaali elementide summad) jne. Sarnasussuhe on ekvivalentsisuhe (refleksiivne, sümmeetriline, transitiivne) ning jagab kõigi n∗n maatriksite hulga isoleeritud ekvivalentsiklassideks. Seega saab olekuvõrrandeid teisendada vaid säärasteks võrranditeks, mille süsteemimaatriks $\hat{A}$ kuulub esialgse maatriksiga A samasse sarnasusklassi.

Kui me teame soovitud $\hat{A}$ maatriksi kuju, siis sobiva teisendusmaatriksi T saab arvutada seosest (tuleneb valemist 3.38)

$$T\hat{A}=AT \qquad 3.44$$

Olekuvõrrandite teisendamisel võib olla mitmesuguseid eesmärke. Üheks tihti kasutatavaks eesmärgiks on maksimaalselt lihtsa olekuvõrrandite kuju saamine, kus süsteemimaatriks väljenduks diagonaalmaatriksina

$$\hat{A}=\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n\end{bmatrix} \qquad 3.45$$

Diagonaalmaatriksi peadiagonaali elemendid on muidugi omaväärtused, seega peavad need vastama esialgse maatriksi A omaväärtustele (mingis järjestuses). Lugedes seepärast Λ teadaolevaks, taandub ülesanne sobiva T leidmisele 3.44 alusel.
Kui väljendada maatriks T veeruvektorite $t^{(i)}$ kogumina

$$T=\left[t^{(1)}, \quad t^{(2)}, \quad \cdots \quad t^{(n)}\right] \qquad 3.46$$

saame 3.44 lahutada iseseisvateks võrranditeks

$$\lambda_i t^{(i)}=At^{(i)} \qquad 3.47$$

Neist selgub, et suurused $t^{(i)}$ on omaväärtusele λ_i vastavad omavektorid $t^{(i)}$, sest lineaaralgebras nimetatakse omavektoriks võrrandi

$$(\lambda_i E-A)t^{(i)}=0 \qquad 3.48$$

lahendeid (ilmselt on 3.47 ja 3.48 ekvivalentsed). Seejuures pole omavektor üheselt määratud (kui $t^{(i)}$ on omavektor, siis ka $ct^{(i)}$ on omavektor, kusjuures c on meelevaldne reaalarv). Kahjuks pole kirjeldatud metoodika kasutatav igasuguse süsteemimaatriksi A korral, sest mõnel puhul sarnasusklass ei sisalda üldse diagonaalmaatrikseid. Küll on teada, et mittekordsete omaväärtustega süsteemimaatriksi puhul leidub sarnasusklassis alati diagonaalkuju ja ülesanne on kirjeldatud viisil lahendatav. Tulemusena saame **normaliseeritud olekuvõrrandid**

$$\frac{d}{dt}Z(t)=\Lambda Z(t)+\hat{B}U(t) \qquad 3.49$$

$$Y(t)=\hat{C}Z(t)+DU(t) \qquad 3.50$$

kus $\hat{B}$ ja $\hat{C}$ leitakse valemitega 3.39 ja 3.40 ning teisendusmaatriks T valemitega 3.44, 3.46, 3.47 kirjeldatud protseduuri abil.
Normaliseeritud olekuvõrrandite lahendamine osutub üpris lihtsaks, kuna maatrikseksponent on diagonaalmaatriksi korral väljendatav väga lihtsal kujul (arvestades valemit 3.45)

$$e^{\Lambda t}=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix} \qquad 3.51$$

NÄIDE 3.5

Lähtume süsteemimudelist $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18 & -8\\ 60 & -26\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7\\ 18\end{bmatrix}u;\ y=\begin{bmatrix}21 & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$

Näite 3.1 kohaselt on omaväärtused -2 ja -6.

Nüüd valemi 3.47 alusel, otsides teisendusmaatriksit kujul $T=\begin{bmatrix}t_{11} & t_{12}\\ t_{21} & t_{22}\end{bmatrix}$

$\lambda_1=-2 \quad \Rightarrow \quad -2\begin{bmatrix}t_{11}\\ t_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18 & -8\\ 60 & -26\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_{11}\\ t_{21}\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad 20t_{11}=8t_{21}$ Valime $t_{11}=2$, siis $t_{21}=5$

$\lambda_2=-6 \quad \Rightarrow \quad -6\begin{bmatrix}t_{12}\\ t_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18 & -8\\ 60 & -26\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_{12}\\ t_{22}\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad 24t_{12}=8t_{22}$ Valime $t_{12}=1$, siis $t_{22}=3$

Seega

$$T=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{bmatrix};\ T^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{bmatrix};\ \hat{B}=T^{-1}B=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\ 18\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix};$$

$$\hat{C}=CT=\begin{bmatrix}21 & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3\end{bmatrix}$$

Seega normaliseeritud olekuvõrrandid on

$$\begin{bmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}u;\quad y=\begin{bmatrix}2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}$$

Leides kirjeldatud olekuvõrrandite lahendi (diagonaalmaatriksi korral on see valemi 3.51 kohaselt lihtne), võime lahendi väljendada esialgsete olekumuutujate suhtes 3.35 alusel

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1(t)\\ z_2(t)\end{bmatrix} \qquad 3.52$$

3.7. OLEKUGRAAF (*SIGNAL GRAPH OF STATE MODEL*)

Lineaarse süsteemi olekuvõrrandeid on võimalik kirjeldada ka signaaligraafi eriliigi–olekugraafi abil. Põhiliseks **olekugraafi** iseärasuseks on vajadus kirjeldada igat olekumuutujat kahe tipuga, mis esindavad muutujaid x_i ja $\dot{x}_i$. Need muutujad on püsivalt seotud integraalvalemiga

$$x_i(t)=x_i(0)+\int_0^t \dot{x}_i(\tau)d\tau \qquad 3.53$$

Seetõttu on joonisel 3.2 vastaval kaarel näidatud ka integraali sümbol. Kui muutujad signaaligraafil esitada ajalise vormi asemel Laplace’i kujutistena, siis on loomulik tähistada kaar integreerimisoperaatoriga s^{-1}, mis tuleneb seosest

$$\mathcal{L}(\dot{x}_i)=sx_i(s)-x_i(0) \quad \Rightarrow \quad x_i(s)=s^{-1}\mathcal{L}(\dot{x}_i)+x_i(0)s^{-1} \qquad 3.54$$

kusjuures algväärtuse kujutis avaldub siis suurusena $x_i(0)s^{-1}$.

Olekugraaf on ilmekas olekuvõrrandite esitusviis lihtsamate süsteemide puhul, võimaldades hõlpsasti arvutada mitmekesiseid ülekandesuhteid. Sageli jäetakse olekute algtingimusi kajastavad kaared graafis näitamata. Tulemus vastab sisuliselt nullisele algolekule (ülekannete

korral peavad sellised tingimused olema täidetud). Vajadusel on algtingimused joonise 3.2 alusel hõlpsasti lisatavad.
Olekugraaf on kasutatav ka mõningate üldisemat laadi rakendusülesannete puhul, milliseid käsitleme edasises.

<u>NÄIDE 3.6</u>

Vaatleme näite 3.5 süsteemimudelile vastavat olekugraafi.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & -8 \\ 60 & -26 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 18 \end{bmatrix} u; \; y_1 = \begin{bmatrix} 21 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Hõlbus on näha, et iga parameetrite maatriksite element on kajastatud ühe graafi kaarega, kusjuures tuure moodustavad ainuüksi A maatriksit esindavad kaared.

Normaliseeritud olekuvõrranditele vastav graaf on oma struktuurilt märksa lihtsam

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} u; \quad y = \begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Et joonisel 3.4 kujutatud graafi tippudele on vastavusse seatud muutujate operaatorkujutised, siis on graaf hõlpsalt kasutatav ülekandefunktsiooni leidmiseks

$$H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{6s^{-1}}{1+2s^{-1}} + \frac{-3s^{-1}}{1+6s^{-1}} = \frac{6}{s+2} - \frac{3}{s+6} = \frac{3s+30}{(s+2)(s+6)}$$

Tulemus loomulikult ühtub näite 3.4 tulemusega.

3.8. ÜLEKANDEMUDELILE VASTAVAD OLEKUMUDELID
(*STATE MODELS CORRESPONDING TO GIVEN TRANSFER FUNCTION*)

Olekumudeli ülekandemaatriks $\mathcal{H}(s)$ (valem 3.32) seab iga olekumudeli sisend-väljundmuutujate paariga vastavusse teatava ülekandefunktsiooni. Ühene pöördsuhe aga puudub, sest sama ülekandefunktsioon võib tekkida mitmesuguste maatriksite A, B, C ja D kombinatsioonide tulemusena. Mõningatel puhkudel võib osutuda vajalikuks teada mõnda soovitud ülekandefunktsiooniga olekumudelit. Sellist laadi ülesannete lahendamisel on olekugraafi idee kasutamine otstarbekas ja lihtne. Järgnevas vaatleme lahendusmetodoloogiat ühe etteantud ülekandefunktsiooni korral, s.o. ühe sisendi ja ühe väljundiga süsteemi puhul, selgitades ideid näidete käsitluse käigus.

<u>NÄIDE 3.7</u>

Antud $H(s) = \dfrac{45}{s+3}$. Väljendame ülekande s^{-1} abil: $H(s^{-1}) = \dfrac{45s^{-1}}{1+3s^{-1}}$

Ülekanne vastab graafile tuuriga $-3s^{-1}$ ning päriteega $45s^{-1}$.
Seega:

Järelikult saame ühe olekuga mudeli:

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + 45u$$
$$y = x_1$$

Ilmselt peab kaarte b ja c ülekannete korrutis olema 45, seega kummagi ülekande võime valida mitmeti.

NÄIDE 3.8

$H(s) = \dfrac{3s - 36}{s^2 + 5s + 6} = \dfrac{3s^{-1} - 36s^{-2}}{1 + 5s^{-1} + 6s^{-2}}$ Teisendus muudab ülekande nimetaja graafi determinandi avaldisele vastavaks omavahel puutuvate tuuride tingimusis. Järgmiseks etapiks on kahe puutuva ja vajalikke ülekandeid omava tuuri moodustamine

Seejärel tuleb graafile lisada vajalike ülekannetega päriteed sisendist väljundisse:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & -36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Vaheetappides on vajalike sidekaarte ülekanneteks mugav valida 1, siis lisakaarte koefitsiendid ei muuda ülekandeid. Loomulikult on päriteede ülekanded kaarte vahel mitmeti jagatavad (seejuures päriteedel võivad olla ühised osad!).

Toodud näidete najal saab esitada kaks kanoonilist realisatsioonitüüpi, mida illustreerime kolmandat järku süsteemi näitel

$$H(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{b_2 s^{-1} + b_1 s^{-2} + b_0 s^{-3}}{1 + a_2 s^{-1} + a_1 s^{-2} + a_0 s^{-3}}$$

I

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix}}_{A_I} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_{B_I} u \qquad y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C_I} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

II

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2\end{bmatrix}}_{A_{II}}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}}_{B_{II}}u \qquad y = \underbrace{\begin{bmatrix}b_0 & b_1 & b_2\end{bmatrix}}_{C_{II}}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

Neid realisatsioone võib käsitleda üksteise suhtes duaalsetena, sest ilmselt kehtivad seosed

$$A_{II}=A_I^T;\ \ B_{II}=C_I^T;\ \ C_{II}=B_I^T \qquad 3.55$$

Kui ülekande lugeja ja nimetaja järgud on võrdsed, siis peab olekumudelis teatavasti eksisteerima otsesidekomponent. See on leitav ülekandefunktsiooni täisosa eraldamisega.

NÄIDE 3.9

$$H(s) = \frac{s+2}{s+1} = 1 + \frac{1}{s+1} = 1 + \frac{s^{-1}}{1+s^{-1}} \quad \Rightarrow$$

Suhteliselt lihtsad realisatsioonid võib saada ka siis, kui teisendatav ülekandefunktsioon tükeldada esialgu osadeks ja need realiseerida iseseisvalt.

NÄIDE 3.10

I $\qquad H(s) = \dfrac{3(s+2)(s+7)}{(s+1)(s^2+8s+25)} = \dfrac{s+2}{s+1}\cdot\dfrac{3(s+7)}{s^2+8s+25}$ (järjestikune realisatsioon)

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -8 & -25\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u \qquad y = \begin{bmatrix}0 & 3 & 21\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

II $\qquad H() = \dfrac{3(s+2)(s+7)}{(s+1)(s^2+8s+25)} = \dfrac{1}{s+1} + \dfrac{2s+17}{s^2+8s+25}$ (paralleelne realisatsioon)

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -8 & -25\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 2 & 17\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

Seega on olekugraafi ülekandeomaduste baasil võimalik konstrueerida väga mitmekesiseid olekumudeleid, mis vastavad soovitud ülekandefunktsioonile. Samad ideed on realiseeritavad ka mitme sisendi ja väljundi korral, kui on antud vastavad ülekandefunktsioonid, muidugi eeldusel, et nende poolused (või nimetaja polünoomid) on ühesugused (või saab neid sellisteks muuta – näiteks ennistades väljataandunud nulli ja pooluse paari).