2. LINEAARSE STATSIONAARSE PIDEVAJA SÜSTEEMI ÜLEKANDEMUDEL
(INPUT-OUTPUT MODEL OF LINEAR TIME-INVARIANT SYSTEM)

2.1. ÜHE SISENDI JA ÜHE VÄLJUNDIGA SÜSTEEMI MATEMAATILINE MUDEL *(SINGLE INPUT – SINGLE OUTPUT (SISO) MODEL)*

Nagu on osas 1.7.3 selgitatud, kajastab ülekandemudel süsteemi sisend- ja väljundmuutujate otsest seost. Tüüpiline ühe sisendmuutuja u(t) ja väljundmuutujaga y(t) lineaarse süsteemi matemaatiline mudel (eeldame siledat süsteemi) on kirjeldatav diferentsiaalvõrrandiga

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m\frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}} + \cdots b_1\frac{du}{dt} + b_0 u \qquad 2.1$$

mille koefitsiente $a_{n-1},...,a_0$ ja $b_m,...,b_0$ võib käsitleda süsteemi parameetritena. Süsteemi **statsionaarsus** väljendub kõigi koefitsientide konstantsusena (mittesõltuvusena ajast). Statsionaarse süsteemi analüüsi võib alati alustada meelevaldsest ajahetkest t_0 ning lugeda seda null-ajahetkeks. Väljundmuutuja ajaline käitumine leitakse diferentsiaalvõrrandi lahendamisel etteantud (süsteemist mittesõltuva) sisendmuutuja korral. Üheselt määratud lahendi saamiseks peavad olema fikseeritud algtingimused, mis sisuliselt väljendavad süsteemisiseseid akumulatsioone. Kokkuleppeliselt loetakse ülekandemudeli korral, et alghetkel peavad sisemised akumulatsioonid alati puuduma (on võrdsed nulliga). Seega algtingimused väljenduvad kujul

$$y(0) = 0;\ \frac{dy}{dt}(0) = 0;\ \frac{d^2y}{dt^2}(0) = 0;\ \cdots\ \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}(0) = 0 \qquad 2.2$$

Tulemusena on väljundmuutuja y(t) üheselt määratud sisendmuutujaga u(t)

$$y(t)=H(u(t)), \qquad 2.3$$

kus H tähistab **süsteemi ülekandeoperaatorit**, mis on määratud diferentsiaalvõrrandiga 2.1. Nagu edasisest selgub, on see operaator mitmeti esitatav.

2.2. SÜSTEEMI LINEAARSUSOMADUSED *(LINEARITY PROPERTIES)*

Lineaarsust väljendatakse tavaliselt kahe omaduse kaudu.

2.2.1. ADITIIVSUSOMADUS

Kui sisendsuurus $u_1(t)$ tekitab väljundi (väljundsuuruse) $y_1(t)$ ning sisendsuurus $u_2(t)$ väljundi $y_2(t)$, siis aditiivsusomadus on väljendatav kujul

$$(y_1(t)=H(u_1(t))\ \&\ y_2(t)=H(u_2(t))) \ \Rightarrow\ y(t)=y_1(t)+y_2(t)=H(u_1(t)+u_2(t)) \qquad 2.4$$

teiste sõnadega, sisendmuutujate summa sisendis tekitab vastavate väljundmuutujate summa väljundis.

2.2.2. HOMOGEENSUSOMADUS

Mistahes reaalarvulise konstandi k korral kehtib

$$(y(t)=H(u(t))) \ \Rightarrow\ k\times y(t)=H(k\times u(t)) \qquad 2.5$$

See tähendab, et sisendsuuruse korrutamisel reaalarvuga muutub väljundmuutuja sama arvu kordselt. Kuigi aditiivsusest saab lineaarses süsteemis tuletada homogeensusomaduse ratsionaalarvuliste konstantide puhuks, on need omadused tervikuna erinevad. Näiteks võrrand $y^3(t)=u^3(t)+\left(\frac{du}{dt}\right)^3$ rahuldab homogeensusomadust, kuid mitte aditiivsusomadust, ning pole ilmselt lineaarne.

Lineaarne on süsteem, mis on nii aditiivne kui ka homogeenne. Seda saab väljendada ka ühise seosega

$$H(au_1(t)+bu_2(t))=aH(u_1(t))+bH(u_2(t)) \qquad 2.6$$

Tulemust võib tõlgendada ka järgmiselt:

– iga sisendsignaali mingi komponendi põhjustatud reaktsioon süsteemi väljundis ei sõltu teiste sisendkomponentide põhjustatud väljundreaktsioonidest ning kõik reaktsioonid väljundis liituvad.

Niiviisi sõnastatud omadust nimetatakse ka **superpositsiooniomaduseks**.

Omadusest 2.6 järeldub tähtis lineaarse süsteemi omadus tema analüüsil: kui me tunneme süsteemi reaktsioone lihtsatele sisendsignaalidele, saame hõlpsasti konstrueerida reaktsioone keerukamate sisendsignaalide korral. Samuti võime paljude sisenditega süsteemi korral analüüsida reaktsioone igale sisendmuutujale omaette.

Praktikas lineaarse süsteemi analüüs diferentsiaalvõrrandiga esitatud mudeli 2.1 alusel on piisavalt kohmakas ning otstarbekamaks osutub Laplace'i teisenduse kasutamisel põhinev ülekandefunktsioonide meetod. Selleks aga tuleb eelkõige tutvuda Laplace'i teisendusega.

2.3. LAPLACE'I TEISENDUS *(LAPLACE TRANSFORMATION)*

Laplace'i integraalne teisendusvalem

$$X(s) = \int_0^\infty e^{-st}x(t)dt \qquad 2.7$$

loob üks-ühese vastavuse originaalfunktsioonide hulga $\{x(t)\}$ ja kujutisfunktsioonide hulga $\{X(s)\}$ vahel

$$\{x(t)\} \xleftrightarrow{L} \{X(s)\} \qquad 2.7a$$

kusjuures kujutiste argument on kompleksmuutuja $s=\sigma+j\omega$, mida tihti ka operaatormuutujaks nimetatakse. Vastavus on üks-ühene tingimusel, et kõik originaalfunktsioonid rahuldavad tingimust

$$\forall t<0 \ \Rightarrow \ x(t)=0 \qquad 2.8$$

s.o. enne nullhetke kõik teisendatavad funktsioonid peavad olema nullid. Originaali ja kujutise vastavust tähistame edasiselt kujul $x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$, mõnikord aga ka kujul $X(s)=\mathcal{L}(x(t))$ või $x(t)=\mathcal{L}^{-1}(X(s))$. Tavaliselt on originaal ja kujutis hõlpsasti eristatavad argumendi põhjal. **Laplace'i teisenduse** kohta leidub hulgaliselt õpikuid, käsiraamatuid ja tabeleid [14, 15, 16, 17], seepärast käsitleme lähemalt vaid meie jaoks olulisi aspekte.

Hõlbus on integraali 2.7 omadustest järeldada, et

$$ax_1(t)+bx_2(t) \xleftrightarrow{L} aX_1(s)+bX_2(s) \quad t \geq 0 \qquad 2.9$$

mis tähendab, et Laplace'i teisendus on lineaarne integraalteisendus, mis arvestab x(t) hetkväärtusi kogu ajaintervallis $[0,\infty)$.

Tähtsamad Laplace'i teisenduse omadused, aga samuti oluliste funktsioonide originaalide ja kujutiste vastavused on toodud tabelites 2.1 ja 2.2.

Siia tuleb tabel 2.1

Siia tuleb tabel 2.2

Nagu selgub tabelist 2.1, on funktsiooni x(t) tuletiste kujutised arvutatavad kujul

$$\frac{dx}{dt} \overset{L}{\longleftrightarrow} sX(s) - x(0) \qquad 2.10$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} \overset{L}{\longleftrightarrow} s^2X(s) - sx(0) - \frac{dx}{dt}(0) \qquad 2.11$$

$$\frac{d^nx}{dt^n} \overset{L}{\longleftrightarrow} s^nX(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}\frac{dx}{dt}(0) - \cdots s\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}}(0) - \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}(0) \qquad 2.12$$

Valemeis x(0) on originaali algväärtus, $\frac{dx}{dt}(0)$ – originaali tuletise algväärtus jne. Valemist 2.10 tuleneb, et tuletise kujutis saadakse muutuja kujutise korrutamisel suurusega s. Seega kujutiste vallas muutuja s kajastab õigupoolest tuletisoperaatorit (osutub ka, et s^{-1} vastab integreerimisoperaatorile). Siit tulenebki tava nimetada kujutiste argumenti s mõnikord operaatormuutujaks.
Seosed 2.10 kuni 2.12 võimaldavad rakendada Laplace’i teisendust süsteemi mudelile 2.1. Kui arvestada seejuures nulliseid algtingimusi 2.2, siis saame

$$s^ny(s)+a_{n-1}s^{n-1}y(s)+ \ldots +a_1sy(s)+a_0y(s)=b_ms^mu(s)+b_{m-1}s^{m-1}u(s)+ \ldots +b_1su(s)+b_0u(s) \qquad 2.13$$

Tulem osutub kujutisfunktsioonide suhtes algebraliseks võrrandiks. Selles õigupoolest peitubki üks Laplace’i teisenduse rakendamise eelistest. Algebralisest võrrandist saame otseselt välja arvutada väljundsuuruse kujutise

$$y(s) = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots a_1s + a_0}u(s) \qquad 2.14$$

Kui niiviisi leitud y(s) kujutiselt minna tagasi originaalile y(t), olemegi (enamasti (vt. osa 1.7.3)) leidnud süsteemi väljundreaktsiooni. Mittenullistel algtingimustel on protseduur kohmakam, kuid siiski võimalik. Ülekandemudeli korral peavad nullised algtingimused alati täidetud olema.
Üldjuhul on pöördteisendus (kujutiselt originaalile) väljendatav keerulise kompleksintegraaliga. Rakendustes on aga pea alati kasutatavad lihtsamad meetodid. Üks meetoditest põhineb asjaolul, et piisavalt laia funktsioonide klassi korral väljenduvad nende kujutised kahe kujutispolünoomi suhtena, nagu nähtub Laplace’i teisenduse funktsioonide vastavuste tabelist 2.2 (ka valem 2.14 on analoogne). Harvem kasutatakse ka kujutiste arendamist astmeritta muutuja s negatiivsete astmete järgi, samuti numbrilisi meetodeid. Kujutispolünoomide jagatise korral (ratsionaalfunktsioon) on põhimeetodiks osamurdudeks lahutamine, kust originaal on iga osamurru jaoks tabeli 2.2 abil lihtsasti leitav (tuginedes lineaarsusele 2.9).
Rakenduste puhul on oluline osa veel nn. **piirväärtusteoreemidel**

$$\lim_{t\to+0} x(t) = \lim_{s\to\infty} sX(s) \qquad 2.15$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sx(s) \qquad 2.16$$

mis vastavuste asemel fikseerivad piirväärtuste võrdsused. Neid kasutatakse süsteemis alghetkel tekkida võivate hüppeliste muutuste kindlakstegemisel ($t\to+0$ tähendab piirväärtust alghetkel positiivsete ajamomentide poolelt tulles, s.o. pärast hüpet, kui see hetkel t=0 esineb), samuti originaalfunktsiooni väärtuse leidmisel aja piiramatul kasvamisel.

2.4. SÜSTEEMI ÜLEKANDEFUNKTSIOON *(TRANSFER FUNCTION)*

Laplace’i teisendus võimaldas lineaarse statsionaarse süsteemi diferentsiaalvõrrandiga esitatud matemaatilise mudeli 2.1 teisendada kujule 2.14, kus on algebraliselt seotud sisend- ja väljundmuutujate operaatorkujutised. Kui sellest avaldisest väljendada väljund- ja sisendmuutujate kujutiste suhe, siis saadavat suurust nimetatakse **süsteemi ülekandefunktsiooniks H(s).** Seega

$$H(s)=\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots a_1 s+a_0} \qquad 2.17$$

mis võimaldab sisend- ja väljundmuutujate kujutised seostada valemiga

$$y(s)=H(s)u(s) \qquad 2.18$$

kusjuures ülekandefunktsioon H(s) on sisuliselt ülekandeoperaatori 2.3 realisatsioon süsteemi sisendi ja väljundi operaatorkujutiste ruumis.

On ilmne, et ülekandefunktsioon sõltub ainuüksi süsteemi omadusist (parameetreist) ning H(s) tundes saab antud sisendsignaali korral (leides selle kujutise u(s)) hõlpsasti arvutada väljundsignaali ajalist muutumist kirjeldava avaldise.

Ülekandefunktsiooni mõiste on kasulik ka muus suhtes. Kui kaks süsteemi on ühendatud järjestikku, nagu näidatud joon 2.1, siis kasutades ühendamistingimust $u_2(s)=y_1(s)$, saame valemi

$$\begin{matrix} y_1(s)=H_1(s)u_1(s) \\ y_2(s)=H_2(s)u_2(s) \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad y_2(s)=H_2(s)H_1(s)u_1(s) \qquad 2.19$$

Selle kohaselt on kaks **järjestikühenduses süsteemi** samaväärsed ühe süsteemiga, mille ülekandefunktsioon on võrdne kummagi ülekandefunktsiooni korrutisega.

Joonisel 2.2 on näidatud **süsteemide paralleelühendus**, mille puhul mõlema sisendmuutuja on sama $u_1(s)$, väljundmuutujad aga liidetakse: $y(s)=y_1(s)+y_2(s)$. Nüüd saame

$$\begin{matrix} y_1(s)=H_1(s)u_1(s) \\ y_2(s)=H_2(s)u_1(s) \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad y(s)=(H_1(s)+H_2(s))u_1(s) \qquad 2.20$$

Järelikult on paralleelselt ühendatud süsteemide resulteeriv ülekandefunktsioon võrdne ülekandefunktsioonide summaga.

Eksisteerib veel kolmas viis ühendada kahte süsteemi, millist mõnikord nimetatakse **antiparalleelseks ühenduseks**, sagedamini aga t**agasisideühenduseks**. Ühendusviis ja -tingimused on näidatud joonisel 2.3.

$$\begin{matrix} y_1(s)=H_1(s)u_1(s) \\ y_2(s)=H_2(s)u_2(s) \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} y(s)=y_1(s)=H_1(s)(u(s)+H_2(s)y_1(s)) \\ y(s)=\dfrac{H_1(s)}{1-H_2(s)H_1(s)}u(s) \end{matrix} \qquad 2.21$$

Viimase ühendusviisi puhul on resulteeriv ülekandefunktsioon märksa keerukamalt seotud osasüsteemide ülekandefunktsioonidega. Edaspidises selgub, et tagasisideühendusel on ka mitmeid eripäraseid omadusi, mis eelnevatel ühendustel puuduvad. Vaadeldud näited demonstreerivad ülekandefunktsiooni otstarbekust süsteemide ühenduskombinatsioonide matemaatilise mudeli kirjeldamiseks. Ka süsteemide ühenduste ülekandefunktsioonid jäävad endiselt 2.17 tüüpi ratsionaalfunktsioonideks, kusjuures oluliseks tingimuseks on endiselt nullised algtingimused (2.2).

Ratsionaalfunktsiooni kui kahe polünoomi suhet saab väljendada ka polünoomide nullkohtade kaudu

$$H(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}=\frac{b_m(s-n_1)\cdots(s-n_m)}{(s-p_1)\cdots(s-p_n)}=\frac{b_m\prod_{j=1}^{m}(s-n_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)} \qquad 2.22$$

Seejuures lugeja nullkohti n_j nimetatakse ülekandefunktsiooni nullideks ($s=n_j$ korral $H(s)=0$), nimetaja nullkohti p_i aga ülekandefunktsiooni poolusteks ($s=p_i$ korral $H(s)\to\infty$). Hõlbus on valemitest 2.22 näha, et **ülekandefunktsioon on täielikult määratud**, kui tunneme kõiki poolusi p_i, nulle n_j ning ühte arvtegurit b_m. Seejuures osutub (põhjendus selgub järgmises peatükis 3), et nullide arv m ei saa kunagi ületada pooluste arvu n. Tingimust

$$n \geq m \qquad 2.23$$

nimetatakse tavaliselt **ülekandefunktsiooni realiseeritavuse või võimalikkuse tingimuseks**.

2.5. SIIRDEPROTSESSIDE ARVUTUS ÜLEKANDEFUNKTSIOONI ALUSEL *(CALCULATION OF TRANSIENT PROCESSES)*

Teatava sisendsignaali rakendamisel süsteemi sisendis tekivad siirdeprotsessid. Siseakumulatsioonide puudumise nõude tõttu on süsteem nullise sisendsignaali korral alghetkel tasakaaluolukorras ning väljundsuurus on samuti olnud püsivalt null.

Sisendsignaali rakendamisel tekkiva väljundsignaali arvutamine toimub valemi 2.18 ning joonisel 2.4 näidatud skeemi alusel:

$$u(t)\to u(s)\times H(s)=y(s)\to y(t) \qquad 2.24$$

Eelduseks on ülekandefunktsiooni tundmine. Sisendsignaalile u(t) leitakse kujutis u(s) Laplace'i teisenduste tabeli 2.2 alusel. Järgmisena leitakse väljundmuutuja kujutis. Originaalile üleminek toimub y(s) avaldise lahutamisega osamurdudeks.

<u>NÄIDE 2.1.</u>

Antud: $H(s)=\dfrac{16s^2+15s+500}{s^3+16s^2+85s+250}$; $u(t)=5\times 1(t)$ (1(t) – ühikhüppesignaal)

1. Sisendsignaali kujutis: $u(s)=\dfrac{5}{s}$, sest $1(t)\xleftrightarrow{L}\dfrac{1}{s}$ $1(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0;\\ 0 & t<0.\end{cases}$

2. Väljundsignaali kujutis: $y(s)=\dfrac{80s^2+75s+2500}{s(s^3+16s^2+85s+250)}$

3. Pooluste määramine: $s(s^3+16s^2+85s+250)=0 \Rightarrow s_1=0;\quad s_2=-10;\quad s_{3,4}=-3\pm j4$

Kompleksspoolusi on otstarbekas säilitada paarina:

$$(s+3-j4)(s+3+j4)=(s+3)^2+16=s^2+6s+25$$

4. Osamurdudeks lahutamine:

$$y(s)=\frac{80s^2+75s+2500}{s(s+10)(s^2+6s+25)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+10}+\frac{Cs+D}{s^2+6s+25};\quad A=\frac{2500}{250}=10;\quad B=-\frac{9750}{650}=-15;$$

$$C=5;\quad D=-40$$

5. Väljundsignaali leidmine:

$$\frac{10}{s} \xleftrightarrow{L} 10; \qquad -\frac{15}{s+10} \xleftrightarrow{L} -15e^{-10t}$$

Komplekspooluste korral sobivad seosed:

$$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2} \xleftrightarrow{L} e^{-\alpha t}\sin\omega t$$

$$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2} \xleftrightarrow{L} e^{-\alpha t}\cos\omega t$$

$$\frac{5s-40}{s^2+6s+25} = \frac{5(s+3)-55}{(s+3)^2+4^2} = \frac{5(s+3)}{(s+3)^2+4^2} - \frac{55}{4}\frac{4}{(s+3)^2+4^2}$$

6. Lõpptulemus: $\downarrow$ $\downarrow$

$$y(t) = 10 - 15e^{-10t} + 5e^{-3t}\cos 4t - \frac{55}{4}e^{-3t}\sin 4t$$

7. Kontroll piirväärtustega (2.15, 1.16):

$y(+0) = \lim\limits_{s\to\infty} sy(s) = 0$ Tulemusest: $y(0)=10-15+5=0$ $(e^0=1)$

$y(\infty) = \lim\limits_{s\to 0} sy(s) = \frac{2500}{250} = 10$; Tulemusest: $y(\infty)=10-0+0-0=10$.

2.6. ÜLEKANDEKARAKTERISTIKUD *(TRANSIENT CHARACTERISTICS)*

Ülekandekarakteristikuks nimetatakse süsteemi reaktsiooni teatud tüüpi sisendsignaalile. Et reaktsioon väljundis sõltub nii sisendisse antud testsignaalist kui ka süsteemi omadusist, siis on ülekandekarakteristikut võimalik kasutada süsteemi omaduste eksperimentaalseks määramiseks. Niisugune vajadus tekib, kui miskipärast süsteemi matemaatiline mudel puudub või on raskusi matemaatilise mudeli parameetrite arvväärtuste määramisega. Ülekandekarakteristikute määramisel on mõistlik kasutada võimalikult lihtsate (ja seega täpsemini määratavate) omadustega testsignaale. Tuntumad ülekandekarakteristikute liigid on **impulsskaja**, **hüppekaja** ning **kaldkaja**.

2.6.1. HÜPPEKAJA *(STEP RESPONSE)*

Hüppekaja on lihtsaim ülekandekarakteristik ning saadakse süsteemi väljundreaktsioonina g(t) sisendisse hetkel t=0 antud **ühikhüppesignaalile 1(t)** (vt. näide 2.1).

Et $1(t) \xleftrightarrow{L} s^{-1}$ ning $y(s)=H(s)u(s)$, siis saame seose

$$g(t) \xleftrightarrow{L} s^{-1}H(s) = \frac{H(s)}{s} \qquad 2.25$$

Siit selgub, et hüppekaja tundmine on samaväärne ülekandefunktsiooni teadmisega, s.o. hüppekaja sisaldab täieliku informatsiooni süsteemi dünaamiliste omaduste kohta (eksperimentaalne mõõtmistulemus sisaldab muidugi paratamatut mõõtemääramatust).

Piirväärtusteoreemist $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = \lim\limits_{s\to\infty} H(s)$ tuleneb, et juhul, kui ülekandefunktsioonil on võrdsel hulgal nulle ja pooluseid (lugeja ja nimetaja polünoomide järgud on võrdsed), tekib alghetkel hüppekajas hüpe, s.o. sisendisse antud hüpe kajastub hetkeliselt ka väljundis. Väiksema nullide arvu korral algab hüppekaja sujuvalt nullist.

Piirväärtusteoreemist $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = \lim\limits_{s\to 0} H(s) = \frac{b_0}{a_0}$ selgub, et aja piiramatul kasvamisel läheneb hüppekaja konstantsele väärtusele

$$K = H(0) = \frac{b_0}{a_0} \qquad 2.26$$

mida nimetatakse süsteemi **staatiliseks ülekandeteguriks** ja mis väljendub ülekandefunktsiooni polünoomide vabaliikmete suhtena.

NÄIDE 2.2.

$H(s)=\dfrac{s(s+10)}{(s+2)(s+6)}$ $\dfrac{H(s)}{s}=\dfrac{2,5}{s}-\dfrac{3}{s+2}+\dfrac{0,5}{s+6}$; $g(t)=2,5-3e^{-2t}+0,5e^{-6t}$; $K=H(0)=2,5$.

Väikese t korral $e^{-\alpha t}\approx 1-\alpha t$ ning $g(t)\approx 2,5-3(1-2t)+0,5(1-6t)=3t$ (hüpet pole). Siirdeolukorra kestuse määrab kõige aeglasemalt sumbuv eksponentne komponent, mis näites vastab poolusele $p_1=-2$. Kirjutades eksponendi vormis $e^{-t/T}$, kus $T=\dfrac{1}{p_{max}}$ on eksponendi ajakonstant, võib arvutada, et t=(3...5)T korral $e^{-3}\approx 0.05$, $e^{-4}\approx 0.018$, $e^{-5}\approx 0.0067$, seega 3...5 ajakonstandi möödudes võib siirdeprotsessi lugeda praktiliselt lõppenuks (ajakonstant on süsteemile olemuslik protsessi muutumiskiiruse mõõtühik). Hüppekaja algosa ligikaudne avaldis kehtib ajani, mis on märgatavalt väiksem kõige kiiremini muutuvast eksponendist (selle ajakonstant $T=\dfrac{1}{p_{min}}$ on määratud absoluutväärtuse poolest suurima negatiivse poolusega). Komplekssete pooluste puhul esinevad komponendid $e^{-\alpha t}\cos\omega t$ või $e^{-\alpha t}\sin\omega t$. Neis on $e^{-\alpha t}$ siinus-koosinuskõverate mähisjooneks, seepärast on komplekspooluste reaalosa α ülalkirjeldatule analoogiliselt kasutatav protsesside kulgemiskiiruse ligikaudsel hindamisel.

NÄIDE 2.3.

Selgitamaks, kuidas sõltub süsteemi hüppekaja ülekandefunktsiooni nullide ja pooluste vahekorrast, analüüsime hästi lihtsaid ülekandefunktsioone

$$H_n(s)=\frac{1}{(s+1)^n} \qquad 2.27$$

omavate süsteemide hüppekajasid n=1 ... 5 korral. Hüppekaja saab arvutada kirjanduses [15, lk.705, valem 175] toodud valemi alusel

$$\mathcal{L}(g_n(t))=\frac{1}{s(s+1)^n}\xleftrightarrow{L}1-E_{n-1}(t)e^{-t}; \qquad E_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!} \qquad 2.28$$

Siit tulenevad avaldised

$g_1(t)=1-e^{-t}$ $\qquad g_2(t)=1-(1+t)e^{-t}$ $\qquad g_3(t)=1-(1+t+\frac{1}{2}t^2)e^{-t}$

$g_4(t)=1-(1+t+\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{6}t^3)e^{-t}$ $\qquad g_5(t)=1-(1+t+\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{6}t^3+\dfrac{1}{24}t^4)e^{-t}$

Hüppekajade arvutustulemused on esitatud kõrvaltoodud joonisel graafikuteparvena ajaintervallis t=0 ... 4. Selgelt on näha hüppekajade algusosa kasvu tugev aeglustumine pooluse kordsuse suurenemisel. Et $E_n(t)$ piirväärtuseks n piiramatul kasvamisel on eksponentfunktsioon e^t, siis piirjuhtumil $n\to\infty$ hüppekaja algkasv nihkub samuti lõpmatusse. Ainuüksi hüppekajal $g_1(t)$ on alghetkel mittenulline tuletis ja see kasvab esialgu lineaarselt, nagu oli ka näites 2.2, kus ülekandefunktsiooni nulle oli ühe võrra vähem kui pooluseid.

Osutub, et hüppekaja algusosa kasv aeglustub alati siis, kui pooluseid on märgatavalt rohkem kui nulle. Suure pooluste ülekaalu korral, näiteks $g_4(t)$ ja $g_5(t)$ puhul arvutatud näites võib hüppekaja teatava ligikaudsusega esitada algavana nulltasemelt hiljem, nagu on joonisel punktiiriga näidatud. Tulemusena saame süsteemi ülekandeomadusi kirjeldada teatava hilistumisena (vt.p.1.7.3) ja seejärel esialgu lineaarselt kasvava siirdekõverana, mis on $g_1(t)$ sarnane eksponent. Seetõttu viimane kõver

vastab ühe poolusega ülekandefunktsioonile. Muidugi tuleb sobiv hilistumisaeg ning pooluse väärtus arvutuslikult määrata. Kirjeldatud meetodit tehisliku hilistumise kasutuselevõtuga rakendatakse paljudel juhtudel, eriti siis, kui süsteemi dünaamilised karakteristikud on leitud eksperimentaalse hüppekaja abil.
Kirjeldatud hilistumisnähtust nimetatakse eristamise huvides tavaliselt **inertseks hilistumiseks** (*inertial delay*), jättes siis energia jm. piiratud liikumiskiirusest tekkiva hilistumise (vt.p.1.7.3) nimetuseks **transporthilistumine** (*transportation delay*).
Ainuüksi hilistumist omava süsteemi

$$y(t)=x(t-\tau) \tag{2.29}$$

ülekandefunktsioon on tabeli 2.1 alusel määratav lihtsalt

$$H(s)=e^{-\tau s} \tag{2.30}$$

On tähelepanuväärne, et ülekandefunktsioon 2.30 pole ratsionaalfunktsioon (kahe polünoomi suhe). See viitab ühtlasi hilistumise olulisele erinevusele võrreldes varemkäsitletud süsteemide inertsiaalset tüüpi omadustega. Viimaseid sai kirjeldada harilike lineaarsete diferentsiaalvõrranditega ja see viis meid valemi 2.13 alusel ratsionaalsete ülekandefunktsioonideni.

2.6.2. IMPULSSKAJA *(IMPULSE RESPONSE)*

Impulsskaja on süsteemi väljundreaktsioon h(t) sisendisse antavale ideaalsele impulsile. Ideaalne impulss moodustub piirväärtusena lühikesest impulsist selle kestuse lähendamisel nullile nii, et impulsi pindala säilub ühikulisena. Sellist impulssi nimetatakse **δ-impulsiks** ehk Diraci impulsiks $\delta(t)$. Impulsi $\delta(t)$ esinemismomendiks on kokkuleppeliselt ajahetk t=0, impulsil $\delta(t-t_1)$ aga ajahetk $t=t_1$. Matemaatiliselt kuulub δ-impulss üldistatud funktsioonide e. distributsioonide hulka.
δ-impulsi tähtsaimaiks omadusiks on integraalsed omadused:

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) f(t)\,dt = f(0) \tag{2.31}$$

Erijuhuna: $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)\,dt = 1$ (impulsi ühikpindala) 2.32

Integraali rajade intervall $[-\varepsilon,\varepsilon]$ peab hõlmama δ-impulsi tekkehetke.
Valemi 2.31 põhjal saab arvutada δ-impulsi Laplace kujutise

$$\delta(t) \xleftrightarrow{L} 1 \tag{2.33}$$

Ideaalse impulsi põhjustatud süsteemi väljundreaktsiooni h(t) Laplace'i kujutiseks osutub joonise 2.6 alusel ülekandefunktsioon

$$h(t) \xleftrightarrow{L} H(s) \tag{2.34}$$

millest tuleneb impulsskaja ja ülekandefunktsiooni võrdväärsus süsteemi omaduste kajastajana.
Piirväärtusest $\lim_{t\to 0} h(t) = \lim_{s\to\infty} sH(s)$ järeldub, et hetkel t=0 on impulsskajal hüpe vaid siis, kui ülekandefunktsioonil on nulle ühe võrra vähem kui pooluseid. Kui aga ülekandefunktsioonil on nulle ja pooluseid võrdselt, siis tekib impulsskaja koostises väljundis δ-impulsiga proportsionaalne komponent.
Piirväärtusest $\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{s\to 0} sH(s)$ tuleneb, et aja piiramatul kasvamisel saab impulsskaja h(t) jääda nullist erinevaks ainuüksi siis, kui ülekandefunktsioon omab poolust s=0.

Valemitest 2.25 ja 2.34 saab tuletada ka seosed impulss- ja hüppekaja vahel:

$$g(t) \xleftrightarrow{L} \frac{H(s)}{s} \Rightarrow \frac{dg(t)}{dt} \xleftrightarrow{L} s\frac{H(s)}{s} - g(0) \Rightarrow \frac{dg(t)}{dt} + g(0)\delta(t) \xleftrightarrow{L} s\frac{H(s)}{s} = H(s)$$

Siit saame

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} + g(0)\delta(t) \qquad 2.35$$

$$g(t) = g(0) + \int_0^t h(\tau)d\tau \qquad 2.36$$

Valemist 2.35 on selgelt näha δ-impulsiga proportsionaalse komponendi esinemine juhul, kui hüppekajas tekib alghetkel hüpe. Ilmselt g(0)=0 korral vastav liige puudub.

NÄIDE 2.4.

$$H(s) = \frac{3(s+10)}{(s+2)(s+6)} = \frac{6}{s+2} - \frac{3}{s+6}$$

$$h(t)=6e^{-2t}-3e^{-6t}$$

Alghetkel tekib hüpe suurusega 3, sellele järgneb esimestel ajahetkedel $h(t)\approx 3+6t$. Impulsskaja lõpuosa on lähedane komponendile $6e^{-2t}$, nagu oli selgitatud juba hüppekaja puhul.

Impulsskaja on rakendatav ka siirdeprotsesside arvutamisel. Laplace'i kujutiste kasutamisel oli põhivalemiks 2.18 kujul u(s)H(s)=y(s). Kui püüda seda valemit transformeerida üleminekuga originaalidele, siis tuleb rakendada seost (vt. tabel 2.1), mis kujutiste korrutisele seab vastavusse teatava originaalide integraali

$$u(s)H(s) \xleftrightarrow{L} \int_0^t u(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

mida nimetatakse **konvolutsiooniintegraaliks**. Tulemusena saame valemi

$$y(t) = \int_0^t u(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^t u(t-\tau)h(\tau)d\tau \qquad 2.37$$

milles mõlemad konvolutsiooniintegraali vormid on ekvivalentsed. Valemi rakendamine eeldab impulsskaja tundmist ja võimaldab arvutusi sooritada ajavallas. Meetod sobib arvutil rakendamiseks, kasutades mingit integraali numbrilise arvutamise algoritmi.
Konvolutsiooniintegraali alusel saab lahendada ka impulsskaja eksperimentaalse määramise probleemi, sest pole ju võimalik katses realiseerida ideaalset δ-impulssi. Kui asendada δ-impulss mingi reaalse ühikulist pindala omava impulsiga, mille kestus ei ületa ν, siis konvolutsiooniintegraali rajad hõlmavad aja intervalli [0,ν], kuna hiljem integrandi tegur u(τ)=0. Kui teine integrandi tegur h(t-τ) on antud ajaintervalli kestel praktiliselt konstantne, siis võime selle teguri tuua integraali alt välja ning 2.37 asemel saame

$$y(t) \approx h(t-\tau)\int_0^\nu u(\tau)d\tau \approx h(t)\int_0^\nu u(\tau)d\tau \qquad 2.38$$

Et viimane integraal väljendab sisendimpulsi pindala, siis impulsi tegelik kuju polegi oluline. Selgub, et kui sisendimpulsi kestus on nii lühike, et impulsskaja ei jõua selle ajaintervalli jooksul märgatavalt

muutuda, siis saame süsteemi väljundis praktiliselt õige impulsskaja. Eksperimendis saab nõutavat lühidust hõlpsasti kontrollida - lühendame sisendimpulsi kestust (säilitades pindala) astmeti seni, kuni väljundreaktsioon enam ei muutu. Siis ongi väljundreaktsioon h(t) (või sellest impulsi pindala kordselt suurem).
Kirjeldatud nähtused on löögitaoliste protsesside puhul samalaadilised paljudes valdkondades. Näiteks piljardikuulide põrkel antakse hetkeliselt edasi jõuimpulss, mille reaktsioonina teise kuuli veeremine kestab kaua, kuid juba ilma kontaktita (“impulsskaja”).

2.6.3. KALDKAJA (RAMPKAJA) *(RAMP RESPONSE)*

Kaldkaja r(t) on süsteemi väljundreaktsioon ühikulise kiirusega lineaarselt kasvavale sisendsignaalile. Seda ülekandekarakteristikut kasutatakse praktikas suhteliselt harva, sest reaalses süsteemis lineaarne kasv ei saa jätkuda piiramatu aja kestel.
Joonisel 2.7 toodud seoste alusel saame vastavuse

$$r(t) \xleftrightarrow{L} \frac{H(s)}{s^2} \qquad 2.39$$

Hõlpsasti võib saada seose hüppekajaga kujul

$$g(t) = \frac{dr(t)}{dt} \qquad 2.40$$

Kaldkajas ei saa alghetkel hüppeid kunagi tekkida.

<u>NÄIDE 2.5.</u>

$$H(s) = \frac{3(s+10)}{(s+2)(s+6)} \qquad \frac{H(s)}{s^2} \xleftrightarrow{L} r(t) = \frac{5}{2}t - \frac{17}{12} + \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{1}{12}e^{-6t}.$$

Arvutustulemusest selgub, et pärast e^{-2t} sumbumist (umbes 5T≈2,5 ajaühikut) kaldkaja kasvab lineaarselt (kaldega 5/2) statsionaarses režiimis.

2.7. SAGEDUSKARAKTERISTIKUD *(FREQUENCY CHARACTERISTICS)*

2.7.1. SAGEDUSKARAKTERISTIKUTE MÕISTE (*CONCEPT OF FREQUENCY CHARACTERISTICS*)

Sageduskarakteristikud on ülekandekarakteristikute liik, mis oluliselt erineb varemvaadeldud hüppe- ja impulsskajadest. Süsteemi sisendsuuruseks on ühikulise amplituudiga siinussignaal. Pärast siirderežiimi lõppu tekib püsirežiim, kus väljundmuutujaks on sama sagedusega, kuid erineva amplituudi M ja faasinihkega φ siinussignaal.

Amplituudi sageduskarakteristikuks (amplituudi ülekanne) nimetatakse väljundsignaali mooduli sõltuvust sisendsignaali sagedusest M(ω) püsirežiimis.
Faasi sageduskarakteristikuks (faasinihe) nimetatakse sisend- ja väljundsiinuste faasinihke φ(ω) sõltuvust sisendsignaali sagedusest püsirežiimis.
Amplituudi ja faasi sageduskarakteristikute definitsioonidest tuleneb vajadus osata analüüsida süsteemi siinuseliste sisend- ja väljundsignaalide mooduleid ja faase ning nende suhteid ja erinevusi. Elektrotehnika vallas on selleks välja töötatud nn. diagrammvektorite meetod.

2.7.2. DIAGRAMMVEKTORID JA KOMPLEKSSED SAGEDUSSIGNAALID (*PHASORS AND*

C*OMPLEX FREQUENCY SIGNALS*)

Diagrammvektor esitab siinussignaali M sinψ (kus $\psi=\omega t$) vektorina mingis sobivalt valitud teljestikus. Faasinurga ψ avaldisest tuleneb, et vektor M pöörleb algpunkti ümber nurksagedusega ω. Seejuures võime valida teljestiku nii, et näiteks vektori M projektsioon teatavale teljele vastaks siinussignaali hetkväärtusele mistahes ajahetkel t. Kui meil on korraga tegemist mitme sama sagedust omava siinussignaaliga, siis signaalidele vastavad diagrammvektorid pöörlevad sama nurkkiirusega, kuid võivad omada erinevaid pikkusi (mooduleid, mis vastavad amplituudväärtustele) ning paiknevad erineva suunaga vastavalt faasinihete nurkadele φ. Pole raske veenduda, et kahe siinussignaali summa on selline siinussignaal, mille diagrammvektor osutub liidetavate signaalide diagrammvektorite vektoriaalsummaks. Kui meid huvitavad diagrammvektoritele vastavate signaalide suhted ja faasinihked, siis võime fikseerida mistahes ajahetke ja kirjeldada vastavate vektorite paigutust joonisel 2.9 näidatud viisil paigalseisvatena.

Täiesti samasugusele tulemusele võime jõuda, kui asendame siinussignaali kompleksse eksponentsignaaliga

$$M \sin\omega t \Rightarrow Me^{j\omega t}=M\cos\omega t + jM\sin\omega t$$

Sel puhul vastab imaginaarosa täpselt esialgsele signaalile (koosinuse kaudu väljendatud signaalil aga reaalosa). Samas kompleksarv M $e^{j\psi}$ ($\psi = \omega t$) esitab komplekstasandil punkti, mis paikneb koordinaatide algusest kaugusel M ning vastav suund moodustab reaalteljega nurga ψ (joon.2.10). See punkt määrab komplekstasandil varemkirjeldatud diagrammvektoriga identse vektori (joonis 2.9). Samas on vektorite liitmisega seotud operatsioonid esitatavad kompleksarvude algebra operatsioonidega.

2.7.3. SAGEDUSFUNKTSIOON JA SAGEDUSKARAKTERISTIKUTE ARVUTAMINE (*COMPLEX TRANSFER FUNCTION AND FREQUENCY RESPONSE CALCULATION*)

Sageduskarakteristikute matemaatilise kirjelduse saamiseks on otstarbekas asendada siinussignaalid komplekssete eksponentsignaalidega

$$u(t)=e^{j\omega t}=\cos\omega t + j\sin\omega t \qquad y(t)=Me^{j(\omega t+\varphi)}=Me^{j\varphi}(\cos\omega t+j\sin\omega t) \qquad 2.41$$

Asendades need signaalid lineaarse süsteemi diferentsiaalvõrrandisse 2.1 ja arvestades seejuures, et tuletised avalduvad kujul

$$\frac{du(t)}{dt} = j\omega e^{j\omega t} = j\omega u(t); \qquad \frac{d^2u(t)}{dt^2} = (j\omega^2)u(t) \quad \text{jne} \qquad 2.42$$

saame võrrandi

$$\left((j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_1 j\omega + a_0\right)Me^{j\varphi}e^{j\omega t} = \left(b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega^{m-1} + \cdots + b_1 j\omega + b_0\right)e^{j\omega t}$$

Saadud võrrandist saab välja taandada teguri $e^{j\omega t}$ ning tulemuse teisendada kujule

$$M(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \cdots + b_1 j\omega + b_0}{(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_1 j\omega + a_0} = H(s)\Big|_{s \to j\omega} = H(j\omega) \qquad 2.43$$

Osutub, et otsitavate suuruste M(ω) ja $\varphi(\omega)$ avaldis komplekskujul on seostatav süsteemi ülekandefunktsiooniga H(s), kus muutuja s on asendatud suurusega jω. Saadud funktsionaalset suurust H(jω) nimetatakse **süsteemi (kompleksseks) sagedusfunktsiooniks**, kusjuures

$$M(\omega)=\mathrm{Mod}\,H(j\omega), \qquad \varphi(\omega)=\arg H(j\omega) \qquad 2.44$$

Järelikult on sageduskarakteristikud suhteliselt hõlpsalt leitavad sagedusfunktsioonist H(jω), mis omakorda on tihedalt seotud ülekandefunktsiooniga. Seejuures H(0) on võrdne staatilise ülekandeteguriga (2.26).

<u>NÄIDE 2.6.</u>

Antud $H(s)=\dfrac{5s-3}{s^2+3s+2}$. Siit sagedusfunktsioon $H(j\omega)=\dfrac{-3+j5\omega}{2-\omega^2+j3\omega}$

Nüüd saab leida: $M(\omega)=\dfrac{\sqrt{9+25\omega^2}}{\sqrt{(2-\omega^2)^2+9\omega^2}}$; $\varphi(\omega)=\arctan\left(-\dfrac{5\omega}{3}\right)-\arctan\left(\dfrac{3\omega}{2-\omega^2}\right)$

Saab ka leida reaal- ja imaginaarosad: $H(j\omega)=\dfrac{18\omega^2-6}{\omega^4+5\omega^2+4}+j\dfrac{-5\omega^3+9\omega}{\omega^4+5\omega^2+4}$

Nende avaldised on keerukamad ja arvutusteks vähem otstarbekad.

Alternatiiv: $H(s)=\dfrac{5s-3}{(s+2)(s+1)}$ $M(\omega)=\dfrac{\sqrt{9+25\omega^2}}{\sqrt{4+\omega^2}\sqrt{1+\omega^2}}$

$$\varphi=\arctan\left(-\frac{5\omega}{3}\right)-\arctan\frac{\omega}{2}-\arctan\omega$$

Sageduskarakteristikute punktide arvutamine:
(Kompleksssuuruste esitusviis: M(ω)<φ(ω) ⇒ (moodul M faasiga φ))

$$H(j3)=\frac{-3+j15}{-7+j9}=\frac{15{,}30<101{,}31^o}{11{,}40<127{,}88^o}=1{,}342<-26{,}56^o$$ M(0)=1,5

$$H(j10)=\frac{-3+j50}{-98+j30}=\frac{50{,}09<93{,}43^o}{102{,}49<162{,}98^o}=0{,}489<-69{,}55^o$$ H(0)=1,5<180^o

Analoogiliselt saab leida ka muud sageduskarakteristiku punktid

ω	0,1	0,2	0,4	1,0	$\sqrt{2}$	2,0	4,0	10	20	40	100
M(ω)	1,51	1,543	1,641	1,844	1,810	1,651	1,097	0,489	0,249	0,125	0,050
φ(ω)	162^o	145^o	113^o	49,4^o	23,0^o	-1,7^o	-40,9^o	-69,6^o	-79,7^o	-84,9^o	-87,9^o

2.7.4. LOGARITMILISED SAGEDUSKARAKTERISTIKUD *(LOGARITHMIC FREQUENCY RESPONSES)*

Sageduskarakteristikud osutuvad märksa ilmekamateks ja hõlpsamini konstrueeritavateks, kui nad esitatakse logaritmiliste sageduskarakteristikutena. Nii amplituudi- kui ka sagedustelg omab logaritmilist mõõtkava.
Kokkuleppeliselt arvutatakse logaritmiline amplituud vastavalt valemile

A=20 logM [dB], 2.45

mõõdetuna detsibellides (bell on akustikas kasutatav suhteline helitaseme ühik). Sageduse logaritmilise mõõtkava levinuim ühik on (sagedus-)dekaad. See on võrdne sagedustelje lõiguga, mille otspunktide sageduste suhe on 10 (log10=1), näiteks vahemik 1 kuni 10Hz või ka 50 kuni 500Hz. Harvemini, eeskätt akustiliste sageduskarakteristikute puhul on hästi tuntud ka sagedusintervall oktav (lõik, mille otspunktide sageduste suhe on kaks). Oktavi pikkus vastab log2=0,3010 dekaadile.

Logaritmilisel sagedusteljel nullsagedus puudub (log0=-∞). Võrreldes lineaarse skaalaga on kõrgete sageduste piirkond kokku surutud ja madalate piirkond välja venitatud.
Logaritmilisel faasi sageduskarakteristikul jääb faasi skaala lineaarseks (ühikutega kraadides või radiaanides), sagedusskaala on aga logaritmiline.
Logaritmilise amplituudi sageduskarakteristikule on omane karakteristiku kõverdumine nende sageduste ümbruses, mis arvväärtuselt vastavad süsteemi nullidele või poolustele. Vahepealsetes piirkondades aga karakteristik läheneb sirgele. Seejuures sirgete osade kalded on kordsed väärtusele $\pm 20\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{dek}}$. Sageduse suurenemisel iga reaalpooluse väärtusele vastava sageduse ümbruses karakteristiku kalle muutub $-20\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{dek}}$ võrra ja iga nullile vastava sageduse ümbruses $+20\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{dek}}$ võrra. Komplekspooluste või -nullide paari korral on muutused vastavalt kahekordsed sageduse ümbruses, mis võrdub pooluse või nulli mooduliga. Sageduskarakteristikute kulg vastavate pooluste ümbruses on täpsemini näidatud näites 2.7.

<u>NÄIDE 2.7</u>

$$H(s) = \frac{k}{s+\nu} \qquad\qquad H(s) = \frac{k}{s^2 + 2\beta\nu s + \nu^2}$$

$$K = \frac{k}{\nu} \qquad\qquad K = \frac{k}{\nu^2}$$

Logaritmilisel karakteristikul säilib karakteristiku kuju mistahes pooluse arvväärtuse korral. Nullide ümbruses vastab karakteristiku kuju näites toodu peegelpildile (ehk pöörates pilti ümber horisontaaltelje).
Logaritmilist amplituudi sageduskarakteristikut võib ka ligikaudselt aproksimeerida pooluste või nullide kohal murtud sirglõikudest koosneva karakteristikuna (nn. **asümptootilise sageduskarakteristikuna**), mis näites 2.7 on esitatud punktiirjoonena ning illustreeritud rea näidetena tabelis 2.3.
Kui aga on tegemist suhteliselt suurt imaginaarosa omavate komplekssete nullide või poolustega, siis ilmneb amplituudi sageduskarakteristikus teravama tipuga kõverdunud osa, mida tavaliselt resonantstipuks nimetatakse (vt. näide 2.7). Füüsikaliselt vastab sellele väljundvõnkumiste amplituudi järsk suurenemine või vähenemine resonantssageduse läheduses, mida võib selgitada ka sisendsignaali ja süsteemi nn. omavõnkesageduse ühtimisega. Resonantskoha läheduses esineb ka järsk faasinihke muutus. Seepärast ligikaudne asümptootiline sageduskarakteristik ei sobi kasutamiseks selgete resonantsinähtuste olemasolul (suure imaginaarosaga nullid või poolused).
Väga madalatel sagedustel läheneb amplituudi sageduskarakteristiku väärtus staatilise ülekandeteguri K=H(0) logaritmilisele väärtusele (mis nullise pooluse korral võib osutuda ka lõpmatuks).
Sageduskarakteristiku konstrueerimisel kasutatakse sageli sagedusfunktsiooni H(jω) tükeldamist teatavate tegurite korrutiseks. Üksikute tegurite logaritmilised sageduskarakteristikud annavad liitmise tulemusena hõlpsasti tervikliku amplituudi või faasi sageduskarakteristiku. Sageduskarakteristikute arvutamiseks mitmesuguste rakenduste tarbeks on loodud eritüübilisi tarkvaravahendeid.
Süsteemide mudelite eksperimentaalsel identifitseerimisel on sageduskarakteristikute meetod, vaatamata suuremale töömahule, sageli eelistatavam just suurema täpsuse pärast ja võimaluse tõttu vähendada juhuslike häirete mõju (igat punkti võib mõõta pikema aja jooksul). Samas on

sageduskarakteristikute seosed süsteemide muude ülekandekarakteristikutega väljendatavad vaid küllalt keerukal kujul.

2.8. SIGNAALIGRAAF. ÜLEKANDED SÜSTEEMIDE ÜHENDUSSTRUKTUURIDES *(SIGNAL FLOW GRAPH. TRANSFER RELATIONS IN SYSTEM STRUCTURES)*

Signaaligraaf on orienteeritud graaf, mille tipud esitavad signaale, kaared aga signaalidevahelisi seoseid. Igale kaarele omistatakse signaali ülekanne (sisend-väljund-karakteristik). Iga graafi tipu signaal on võrdne sisenevate kaarte lähtetippude signaalide ja vastavate kaarte ülekannete korrutiste summaga (vt. joonis 2.11).

$x_1=H_{13}x_3$
$x_2=H_{21}x_1+H_{2i}x_i$
$x_k=H_{k1}x_1+H_{k3}x_3$
$x_i=H_{i1}x_1+H_{i2}x_2+ +H_{ik}x_k$
x_3 - alliktipp

Tipud, millel pole sisenevaid kaari, on **alliktipud** ning nende signaalid on väliselt määratud sisendsignaalid. Iga signaaligraaf on ekvivalentne teatava lineaarsete võrrandite süsteemiga (vt. joonis 2.11), kusjuures võrrandite üldarv on võrdne **mittealliktippude hulgaga**. Tänu universaalsusele (võrrandite sisu võib olla mitmekesine) on signaaligraafi mudel võrrandite kirjeldamisel kasutatav paljude ülesannete lahendamisel.

Signaaligraaf võib esitada ka süsteemide ühendusstruktuure. Iga graafi kaarele vastab siis ühe sisendiga (lähtetipp) ja väljundiga (lõpptipp) osasüsteem, mille ülekandekarakteristikut kajastab kaare ülekanne.

$\Rightarrow\ u(s)\cdot H(s)=y(s)$

$\Rightarrow \int_0^t u(\tau)h(t-\tau)d\tau = y(\tau)$

Kui ülekannet esitab ülekandefunktsioon, siis peavad signaalid olema esitatud muutujate Laplace'i kujutistega. Ülekandeomadused on esitatavad ka impulsskaja h(t) näol, nagu näidatud joonisel 2.12.

$u(t)*h(t)=y(t)$

Konvolutsiooniintegraali saab tinglikult käsitada ka konvolutsioonioperatsioonina märgiga $*$, millel on tüüpilised korrutise omadused (kommutatiivsus, assotsiatiivsus):

$$\int_0^\infty u(\tau)h(t-\tau)dt = y(t) \Rightarrow u(t)*h(t) = y(t) \qquad 2.46$$

$$\int_0^\infty h(\tau)u(t-\tau)d\tau = y(t) \Rightarrow h(t)*u(t) = y(t)$$

See võimaldab signaaligraafi abil kirjeldada ka konvolutsioonimudeliga esitatavaid süsteeme.
Kui tahame süsteemikogumit käsitleda ühtse süsteemina, siis selle väljunditeks on ülesandest tulenevail kaalutlusil meie poolt valitud muutujate tipud, sisenditeks aga alliktipud. Kõik muud tipud tuleks püüda likvideerida või neid mitte arvestada. Kirjeldatu on saavutatav kahel viisil:

a) mitteoluliste graafi tippude (või ka kaarte) samm-sammulise elimineerimisega, säilitades graafi ekvivalentsuse;
b) vahetu ülekande arvutamisega alliktipust väljundtippu, mis määrab otsese kaare ülekande allika ja väljundi vahel ning võimaldab vanad kaared kõrvale heita.

Graafi lihtsustamine tippude elimineerimisega tugineb tabelis 2.4 esitatud põhialgoritmidele.

NÄIDE 2.8.

1.Elimineerime tipud E ja D (teostatav samaaegselt)

2.Elimineerime tipu G

3.Elimineerime silmused

4.Elimineerime tipu C

5.Arvutame ülekande H_{BA}, (valemi 2.21 analoog)

$$H_{BA} = \frac{\dfrac{s^{-1} - s^{-2}}{(1-2s^{-1})(1+3s^{-1})}}{1 - \dfrac{2s^{-1}(s^{-2} - s^{-1})}{(1-2s^{-1})(1+3s^{-1})}} = \frac{s^{-1} - s^{-2}}{(1-2s^{-1})(1+3s^{-1}) - 2s^{-1}(s^{-2} - s^{-1})} = \frac{s^{-1} - s^{-2}}{1 + s^{-1} - 4s^{-2} - 2s^{-3}} =$$

$$= \frac{s^2 - s}{s^3 + s^2 - 4s - 2}$$

Samm-sammulise elimineerimisprotsessi raskeim külg on otstarbeka sammude järjestuse valik, mis muudab tülikaks ka protseduuride realiseerimise arvutis. Loomulikult ei sõltu järjestusest tulemus, küll aga töömaht.

Ratsionaalsem on ülekande otsene arvutamine S. J. Masoni valemi põhjal. Alliktipust i meelevaldsesse mittealliktippu j orienteeritud ülekanne H_{ji} on leitav kujul

$$H_{ji} = \frac{\sum C^{k}{}_{ji} D^{k}{}_{ji}}{D} \qquad 2.47$$

kus D - signaaligraafi determinant;

$C^{k}{}_{ji}$ - tipust i tippu j viiva päritee k ülekanne;

$D^{k}{}_{ji}$ - vastava päritee algebraline täiend.

Signaaligraafi determinandi üldvalem on

$$D = 1 - \sum T_l + \sum T_l T_m - \sum T_l T_m T_n + \cdots \qquad 2.48$$

Determinant on omane graafile tervikuna ja ei sõltu arvutatava ülekande lähte- ja lõpptippudest. Determinandi aluseks on graafis leiduvad tuurid. **Tuur** on meelevaldne orientatsiooni arvestav graafi kaarte suletud jada, mis ei läbi ühtki tippu korduvalt. **Tuuri ülekanne T** on kõigi tuuri kaarte ülekannete korrutis.

Valemis on $\sum T_l$ graafi kõigi tuuride ülekannete summa. Liige $\sum T_l T_m$ tähendab kõigi graafi mittepuutuvate tuuripaaride ülekannete korrutiste summat. Mittepuutuvad on tuurid, millel pole ühtki ühist tippu (siis ka mitte ühiseid kaari).
Liige $\sum T_l T_m T_n$ tähendab graafi kõigi mittepuutuvate tuurikolmikute ülekannete korrutiste summat.
Determinandi valem võib analoogiliselt 2.48 jätkuda vahelduvate märkidega liikmetega, kui graafis leidub mittepuutuvaid tuurinelikud, -viisikuid jne. On selge, et säärased võimalused saavad esineda vaid paljude tippudega graafides (kuid ei tarvitse esineda). Seega konkreetse graafi jaoks on determinandi valem lõplik.
Ülekannete lugeja liige C^k_{ji} tähistab teatava päritee k ülekannet alliktipust i väljundtippu j. **Päritee** on neid tippe ühendav ja orientatsiooni arvestav graafi kaarte jada, mis ei läbi ühtki tippu korduvalt.
Päritee ülekanne on kaarte ülekannete korrutis. Iga päritee ülekanne tuleb korrutada **päritee algebralise täiendiga** D^k_{ji}, mis moodustatakse determinandi arvutamise reeglite põhjal, arvestades ainult tuure, mis ei puutu päriteed (ei oma vastava päriteega ühiseid tippe). Kui selliseid tuure pole, siis on $D^k_{ji}=1$ (säilib vaid determinandi valemi 2.48 esimene liige). Summa avaldise 2.47 lugejas tähistab summeerimist kõigi erinevate päriteede ulatuses.

NÄIDE 2.9.

Tuurid:	Ülekanne:
CDBGEC	$2s^{-3}$
CGEC	$2s^{-1}$
DBD	$-2s^{-1}$
DBGD	$-s^{-1}$

Tuuripaarid:	
DBD:CGEC	$-4s^{-2}$

Päriteed:	Ülekanne:
AC DB	s^{-2}
AC GDB	$-s^{-1}$
AEC DB	$-2s^{-2}$
AEC GDB	$2s^{-1}$

$$\sum C_{BA} D_{ba} = s^{-1} - s^{-2}$$

1. Tuuride otsimisel võime graafist eemaldada kõik alliktipud koos neist väljuvate (intsidentsete) kaartega, samuti tipud, kuhu kaared ainuüksi sisenevad (graafi neelud).
2. Järgnevalt on otstarbekas valida mingi tipp (näiteks C) ja otsida kõik tuurid, mis läbivad seda tippu. Otstarbekas on liikuda piki graafi kaari, arvestades alternatiive. Olles tuurid leidnud, võib edasiselt selle tipu oma intsidentsete kaartega eemaldada ja jatkata otsingut samal viisil juba lihtsamas graafis.
3. Olles leidnud kõik tuurid, saab edasiselt määrata kindlaks mittepuutuvad tuuripaarid, -kolmikud jne. ühiseid tipusümboleid mitteomavate tuuride kogumitena.
4. Päriteede otsingud toimuvad sarnaselt tuuride otsimisega Samuti saab leida algebralisi täiendeid teed mittepuutuvate tuuride otsimisega.

$$D=1-2s^{-3}-2s^{-1}+2s^{-1}+s^{-1}-4s^{-2}=1+s^{-1}-4s^{-2}-2s^{-3}$$

Näitest on näha, et tulemus vastab täielikult varemsaadud AEC ülekandele näites 2.8.