1 SÜSTEEMI MÕISTE, LIIGID, MUDELID
(SYSTEM CONCEPT, CLASSIFICATIONS, MODELS)

1.1. SÜSTEEMI MÕISTE *(SYSTEM CONCEPT)*

Süsteemi mõistet kasutatakse tänapäeval väga paljudes valdkondades erilaadsete ilmingute kirjeldamisel. Seepärast on süsteemi mõiste kõikehaarav selgitus piisavalt üldine:

süsteem (kr.k systema "ühendus, tervik") – omavahel seotud objektide terviklik kogum. [EE, kd.9.lk 102]

system – *an assemblage or combination of things or parts forming a complex or unitary whole* [New Webster Dictionary].

Süsteemi mõiste **komponendid:**

element/objekt (*objects*) – süsteemi osis, mida käsitletakse süsteemi suhtes jagamatuna, terviklikuna;

sidemed (*associations, couplings, bonds*) – mistahes laadi seosed elementide vahel, mis võivad olla orienteeritud, vastastikused, muutlikud, juhuslikud jne.

terviklikkus (*wholeness*) – võib tähendada elementide koosluse täielikkust, mõtestatust, teatavat ühtset sihipära, eesmärki, otstarvet, naabruslikkust, kokkuseotust jne., s.o. põhjust või võimalikkust vaadelda teatavat kooslust süsteemina.

On tuntud ka paradoksaalne süsteemi definitsioon (B.R.Gaines):

süsteem on see, mida saab käsitleda süsteemina. Vaatamata näilisele tautoloogiale rõhutab definitsioon asjaolu, et sõltuvalt terviklikkuse kontseptsioonist võib mingist objektide kogumist erineval viisil või alusel moodustada süsteeme. Samas puudub mõne kogumi puhul võimalus või vajadus seda süsteemina vaadelda.

1.2. SÜSTEEMIDE HIERARHIA *(SYSTEM HIERARCHY)*

Paljud süsteemid moodustavad omavahel ülestikulise e. hierarhilise struktuuri. Teatav süsteem võib olla mingi kõrgema taseme süsteemi elemendiks (ja seal käsitletakse seda jagamatuna). Teisalt võib teatava süsteemi element ise sisemiselt moodustada süsteemi, mida aga esialgse süsteemi suhtes tuleb käsitleda tervikuna. Seega võib sama kogum olla sõltuvalt käsitlusvajadustest kord mingi ülemsüsteemi jagamatu element, kord aga süsteem ise. Loomulikult võivad hierarhilised seosed olla ka keerukamad – nii võib teatav süsteem moodustuda muude süsteemide osistest (osasüsteemidest, mida tihti ka alamsüsteemideks nimetatakse).

<u>NÄIDE</u>. **Maailma hierarhia** (fragmentidena)

elementaarosakesed
aatomid
molekulid / algained
ühendid

materjalid/kristallid/ained		rakud
ehituskivid/esemed/tööriistad	mäed/veekogud	taimed/loomad
toad/masinad/aparaadid	planeedid/taevakehad	karjad/metsad/aasad
korterid/tsehhid	tähesüsteemid	populatsioonid/rassid
majad/tehased	galaktikad	loomastik/taimestik/inimkond
linnad/asulad	universum	biosfäär

1.3. SÜSTEEMIDE LIIGITELU *(SYSTEM CLASSIFICATION)*

Süsteemide laiahaardelisusest tulenevalt on neid võimalik liigitada väga paljude tunnuste alusel (näidetena):

1.3.1. VALDKOND *(DOMAIN)*

* **Füüsikalised**: päikesesüsteem, sidevõrk, elektriskeem, ookean, masin.
* **Bioloogilised**: rakk, pärilikkuskandja, inimene, mets.
* **Sotsiaalsed**: perekond, riik, haridus, pensionikindlustus.
* **Immateriaalsed**: põhiseadus, õppekava, sõnaraamat, geomeetria aksioomid, Newtoni seadused.

1.3.2. SUHE ÜMBRUSSE *(ENVIRONMENTAL RELATIONS)*

* **Avatud (lahtine) süsteem** – ümbritseva keskkonna või teiste süsteemidega suhtlev, neid mõjutav ja/või nendelt mõjutusi saav süsteem.
* **Suletud (kinnine, isoleeritud) süsteem** – ümbrusest sõltumatult toimiv süsteem.

1.3.3. TUNDMISMÄÄR *(DETERMINATION MODES)*

* **Determineeritud süsteem** – täpselt määratud seostega (võrrandid vm) kirjeldatavat mudelit omav süsteem.
* **Juhuslik süsteem** – juhuslikku (stohhastilist) laadi määramatust sisaldava mudeliga süsteem.
* **Hägus süsteem** – hägusustüüpi määramatust sisaldava mudeliga süsteem.

1.3.4. SIDEMETE LAAD JA PÄRITOLU *(BONDS MODES)*

* **Orienteeritud süsteem** – suunatoimeline, seoste olulise ebasümmeetriaga süsteem, millel on võimalik aprioorselt eristada sisendeid (välistoime rakenduskohti) ning väljundeid (süsteemi reaktsiooni avaldumiskohti), kusjuures toime väljunditelt sisenditele praktiliselt puudub.
* **Orienteerimata (neutraalne süsteem)** – kõik süsteemi käitumist kirjeldavad muutujad võivad üksteist mõjutada; sidemete sümmeetrilisus, vastastikkus. Ka orienteerimata süsteem võib eriolukordades käituda sarnaselt orienteerituga.
* **Päritolult** võib eristada järgmisi sidemeid:
    - energeetilised
    - füüsikalis-keemilised
    - bioloogilised
    - informatsioonilised
    - mõistelised jne.

1.3.5. KÄITUMISOMADUSED *(BEHAVIOURAL MODES)*

* **Staatilised süsteemid** – elementide omaduste ja sidemete struktuuri poolest eristuvad ajas mittemuutuvad süsteemid.
* **Dünaamilised süsteemid** – võivad esineda nii süsteemi elementide kui ka süsteemi karakteristikute muutused ajas (siirdeprotsessid).
* **Evolutsioonilised süsteemid** – võivad esineda nii süsteemi elementide käitumisomaduste kui ka sidemete struktuuri muutused ajas.

1.3.6. AJAFAKTOR *(TIME FACTOR)*

* **Pidevaja süsteem** – ajalised protsessid on määratud kõigil, ka lõpmata lähedastel ajahetkedel.
* **Diskreetaja süsteem** – süsteemi käitumist iseloomustavate muutujate hetkväärtused (diskreedid) on määratud ainult isoleeritud ajahetkedel, muud ajahetked loetakse süsteemi jaoks mitteeksisteerivaiks.
* **Peitaja süsteem** – süsteem toimib põhjus-tulemus-reeglite alusel ning suhted reaalajaga pole olulised.

1.3.7. KEERUKUSFAKTOR *(COMPLEXITY FACTOR)*

* **Lihtsüsteem (ordinaarne s.)** – on kirjeldatav ja analüüsitav piisava täpsusega matemaatilise või muud tüüpi mudeli najal.
* **Suur süsteem** – täielik (üksikasjaline) mudel pole keerukuse tõttu kasutatav, mistõttu süsteemi peab kirjeldama agregeeritult või fragmentaarsete karakteristikute najal (näiteks globaalne majandussüsteem).

1.4. SÜSTEEMITEOORIA ARENGULOOST *(SYSTEM THEORY EVOLUTION)*

Süsteemsete nähtustega puutus inimene kokku juba õige ammu, teadvustama aga süsteemi kui niisugust õpiti suhteliselt hiljuti. Jättes kõrvale looduslikud nähtused, võib vist vanimaks süsteemseks saavutuseks lugeda inimkeelt ja sellega kaasnevaid märgisüsteeme suhtlemiseks. Väga vanad on ka esimesed seadustekogud kui ühiskonna suhtlusnormid (Hammurapi seadused, 18.saj.e.Kr). Tänapäevani tähtsust omavaiks tuleb lugeda ka Kreeka kultuurist pärit Aristotelese loogikareeglite süsteemi ning Eukleidese geomeetriaaksioome. Kõiki neid iseloomustab rõhutatud terviklikkusetaotlus. Edasist arengut on võimatu ammendavalt kirjeldada, kuigi 17. ja 18. sajandi paljud suured mõtlejad J. Locke’ist I. Kantini arendasid oluliselt süsteemitunnetuse metodoloogiat ja selle mitmekesiseid aspekte. Süsteemile kui üldisele ja iseseisvale nähtusele ning selle olemusele ja sisule hakati tõsisemat tähelepanu pöörama alles 20. sajandi piires. Tekkis **üldine süsteemiteooria** (*general system theory*). Selle loojaks loetakse Austria loodusteadlast Ludwig von Bertalanffy’d, kes töötas Wieni ülikoolis (1934-1948) ja püüdis esimesena sõnastada süsteemi kui üldistatult abstraktse mõiste põhiomadusi. Praegu avaldatakse sellealastes teadusajakirjades igal aastal sadu üldise süsteemiteooria artikleid. Kõrvuti areneb ja süveneb süsteemne käsitlus pea igal elualal. Süsteemi mõiste on üks keskseid semiootikas, küberneetikas, informaatikas, sünergeetikas, organisatsiooniteoorias, krüptoloogias jne.

1.5. SÜSTEEMITEOORIA PÕHIÜLESANDED *(GENERAL TASKS OF SYSTEM THEORY)*

1.5.1. ÜLESANNETE PÕHITÜÜBID (*TYPICAL TASKS*)

1. Meetodite ja käsitlusviiside loomine **süsteemide tundmaõppimiseks** ning **kirjeldamiseks mudeli(-te) abil** (*Modelling methods*).
Eesmärk: süsteemimudeli koostamine.
2. Meetodite väljatöötamine **süsteemide** ja nende **mudelite vastavuse kindlakstegemiseks** ning erilaadsete mudelite **võrdlemiseks** (*Model verification*).
Eesmärk: mudeli adekvaatsuse ja kvaliteedi hindamine.
3. Meetodite loomine **alamsüsteemide eristamiseks** süsteemi koostises (*Structural analysis, decomposition*).
Eesmärk: mudeli sisestruktuuri kirjeldusviiside analüüs.
4. Meetodite ja protseduuride loomine süsteemi **käitumisomaduste kindlaksmääramiseks** etteantud tingimusil (*Behaviour analysis*).
Eesmärk: süsteemi võimaliku käitumise selgitamine.
5. **Süsteemide ekvivalentsi** analüüs (S*ystem equivalence analysis*).
Eesmärk: erineva struktuuri ja ühesuguste käitumisomadustega süsteemide selgitamine.
6. **Süsteemi keerukuse** analüüs (C*omplexity analysis*).
Eesmärk: selgitada süsteemi käitumise võimalik mitmekesisusaste ning vajalike arvutuste oodatav maht.
7. Meetodite loomine soovitud käitumisomadustega **süsteemide loomiseks** teatavate elemendi-tüüpide baasil (*(Structural) synthesis*).
Eesmärk: soovitud omadustega süsteemi konstrueerimine.

8. Meetodite loomine süsteemi **käitumisomaduste muutuste hindamiseks** muudatuste korral elementide omadustes või ühendusviisis (*Sensitivity analysis*).

Eesmärk: selgitada süsteemi käitumisomaduste tundlikkust tingituna elementide ja sidemete tolerantsidest.

9. **Süsteemide klassifitseerimine** (*Classification methods*).

Eesmärk: struktuurilt või käitumiselt suguluslike süsteemiklasside selgitamine.

10. **Süsteemse mõtlemisviisi ja analüüsioskuse arendamine** süsteemiteooria tundmaõppimisel (*System philosophy learning*).

Eesmärk: oskus ära tunda ja tunnetada süsteeme ning mõista nende käitumise mõjutamise ja juhtimise võimalikkust ning viise.

1.5.2. SÜSTEEMIDE DÜNAAMIKA (*SYSTEM DYNAMICS*)

Enamik süsteeme on pidevalt või enamasti muutuvais seisundeis. Seepärast tavatsetaksegi süsteemi iseloomustavaid suurusi nimetada muutujaiks (ajast sõltuvaiks). Samas on inimmeeled küllaltki puudulikud paljude süsteemide muutuste jälgimiseks või isegi avastamiseks. Me ei näe, et televiisori või monitori ekraanil pole otsene kujutis (see tekib inimeses), vaid kiiresti liikuv valgustäpp. Samuti ei saa me vahetult näha metsa pidevat kasvamist. Väga aeglaselt muutuvaid nähtusi tajume staatilise olekuna. Küllap seepärast pärinebki Vana-Kreeka filosoofidelt ideid tõlgendada liikumist staatiliste seisundite jätkuva jadana. Tegelikult on praktiliselt kõik süsteemid dünaamilised, s.o. ajas muutuvate olekutega ning staatilise süsteemi mudel on pigem üliaeglaselt muutuvate olekutega süsteemi idealiseeritud piirjuhtum. Isegi mittemateriaalsed inimloomingu süsteemsed püsiproduktid, näiteks seadustikud, terminikompleksid ja matemaatika aksioomidesüsteemid võivad muutuda. Öeldust järeldub, et avatud süsteemide dünaamika on üks olulisemaid süsteemide omadusi, mis kirjeldab süsteemi käitumist muutuvate välistingimuste korral. Osutub, et käitumine sõltub nii välistoimest kui ka süsteemi sisemistest omadustest. Teatud välistoimest tekitatud ajalist protsessi süsteemis nimetatakse tihti siirdeprotsessiks. Võimalike siirdeprotsesside analüüsi aluseks on tavaliselt süsteemi matemaatiline mudel, mis võimaldab selgitada ja analüüsida tekkivate siirdeprotsesside eripära, lahendades mudelisse kuuluvad võrrandid. Süsteemide siirdeprotsesside analüüsi ja arvutusmeetodite käsitlus moodustabki käesoleva õppeaine ühe keskse eesmärgi. Võib isegi öelda, et õppeaine alanimetuseks sobinuks hästi ka “süsteemide dünaamika”.

1.6. SÜSTEEMIMUDELID

1.6.1. SÜSTEEMIMUDELI MÕISTE *(CONCEPT OF SYSTEM MODEL)*

Süsteemimudel on idealiseeritud olem, mis teatavate lihtsustustega kajastab tegelikku süsteemi kas struktuuri, käitumise või mõlema mõningate omaduste suhtes. Mudeli lihtsustusaste võib olla erinev, tähtis on soovitud omaduste vastavuse säilimine vajalikes piires.

Süsteemimudelit võib kirjeldada sõnaliselt, matemaatiliselt, deskriptiiv-graafiliselt, semiootiliselt, formaalkeelega, materiaalse objektina, aparatuurse analoogmudelina, muudetud mastaapidega natuurobjektina jne. Kujutusviiside paljususe tingib mudelite erinev kasutusmugavus, paindlikkus või vastavuse täpsus.

Insenerialadel kasutatakse tehniliste süsteemide loomise algetappidel reeglina **matemaatilisi mudeleid**, mis võimaldavad loodava süsteemi omadusi nii teoreetiliselt kui ka arvutuslikult uurida ka ebanormaalsetes või ohtlikes olukordades.

1.6.2. TERMOMUUNDURI MUDEL *(THERMOTRANSDUCER)*. Näide

Termomuundur on mõõtetehnikas peamiselt kõrgsagedusvoolu mõõtmisel kasutatav mõõtemuundur, mis koosneb õhutühja klaaskolvi K sisse paigutatud küttemähisest M ja sellele isoleeritult kinnitatud termopaarist T. Mõõdetav vool läbib klemmide 1-1’ kaudu küttemähise, seda kuumutades. Tulemusena tekitab termopaari jootekoht kuumenedes klemmipaaril 2-2’ termopinge. Mõõtes viimast, saame kalibreeritud termomuunduri omaduste alusel leida kõrgsagedusvoolu efektiivväärtuse.

Joonis 1.6.1. esitab skemaatiliselt muunduri elemente ja nende seotust. Mudeli koostamiseks tuleb tarvitusele võtta täiendavaid füüsikalisi muutujaid. Tekkiva termopinge suurus sõltub küttemähise temperatuurist Θ (seda mõõdetakse keskkonna temperatuuri suhtes, mis loetakse võrdseks Θ_k). Mudeli lihtsustamiseks loeme, et kogu küttemähise sisemuse ja välispinna temperatuur on ühesugune. Süsteem koosneb seega kahest soojusliku sidemega seotud põhielemendist – küttemähis ning termopaar.
Küttemähises tekkiv soojusvõimsus on määratav seosega

$$P_e = i^2 R_k \qquad 1.6.1$$

kus R_k on küttemähise elektritakistus. Termopaaris tekkiv elektripinge on mõningate materjalipaaride puhul proportsionaalne jootekohtade temperatuuride erinevusega (eeldame, et teine jootekoht paikneb keskkonna temperatuuril). Siis kehtib teise süsteemi elemendi kohta seos

$$u = k_\Theta \Theta \qquad 1.6.2$$

kus k_Θ sõltub termopaari materjalidest.
Süsteemi elementide soojuslikku seotust saab kirjeldada soojusbilansi võrrandiga, mis määrab ära kujuneva küttemähise temperatuuri

$$P_e dt = C_T(\Theta) d\Theta + C_j(\Theta) S(\Theta + \Theta_k)^4 dt \qquad 1.6.3$$

Lühikese aja dt kestel lisanduv soojusenergia

küttemähise aine soojusmahtuvusena salvestuv soojusenergia
C_T - erisoojusmahtuvus

välispinnalt kiirgusena äraantav energia
C_j - pinnaühiku kiirguskonstant
Θ_k - keskkonna abs. temperatuur
S - välispinna suurus

Koostatud võrrand põhineb mitmele lihtsustusele:
– soojust salvestav küttemähise aine on homogeenne ühtlase C_T väärtusega;
– soojus eraldub kiirgusena ühtlaselt kogu küttemähise välispinnalt;
– muid energiakadusid pole (kolb õhutühi, termopaaris muundub tühine energia).
Saadud võrrandid sisaldavad süsteemi elementidele iseloomulikke parameetreid nagu S, R_k, k_Θ, $C_T(\Theta)$, $C_j(\Theta)$, millest mõned on konstantsed, teised aga muutuvad erinevais tingimusis (esmajoones sõltuvalt temperatuurist Θ).
Süsteem tervikuna on selgesti orienteeritud, sest termopaarile elektripinge rakendamisel küttemähises mingit voolu ilmselt ei teki. Seepärast võib voolu i vaadelda sisendmuutujana ja pinget u väljundmuutujana

Jagades soojusbilansi võrrandi kõik liikmed aja diferentsiaaliga dt, saame kõik **süsteemi kirjeldavad võrrandid** esitada kujul

$$C_T(\Theta) \frac{d\Theta(t)}{dt} + C_j(\Theta) S(\Theta(t) + \Theta_k)^4 = P_e(t) \qquad 1.6.4$$

$$P_e(t) = R_k i^2(t) \qquad 1.6.5$$

$$u(t) = k_\Theta \Theta(t) \qquad 1.6.6$$

See võrrandisüsteem ongi termomuunduri matemaatiliseks mudeliks varemkirjeldatud tingimusil. Kõik võrrandid tuginevad tuntud füüsikaseadustele. Et võrrandisüsteem sisaldab ka diferentsiaalvõrrandi, siis peame täiendavalt teadma analüüsi (võrrandite lahendamise) alghetke jaoks küttekeha temperatuuri väärtuse $\Theta(0)$. Ka keskkonna absoluutne temperatuur Θ_K peab olema teada, kuid võib eeldada, et termomuundur seda märgatavalt mõjutada ei suuda. $\Theta(0)$ sisuline tähtsus seisneb selles, et alghetkel põhjustab kuum küttekeha väljundis termopinge isegi ilma sisendvooluta kogu jahtumisprotsessi käigus. Samas on ka selge, et elektrivoolu juhtimisel sisendisse ei teki

väljundpinge hetkeliselt, vaid sõltub küttekeha soojenemise protsessist. Just taolisi dünaamilisi protsesse võimaldabki matemaatiline mudel arvutada, muidugi mudeli koostamisel tehtud lihtsustustest tulenevate vigade piires.
Vaadeldud näites pole peamine mitte termomuunduri iseärasustega seonduv, vaid üldine metodoloogia matemaatilise mudeli koostamisel, mis algab koostiselementide ja nende sidemete tuvastamisest ning seejärel seisneb nende muutujate seoste kirjeldamises tuntud füüsikaseaduste najal.

1.6.3. ELEKTRISKEEM *(ELECTRICAL CIRCUIT)*

Elementide võrrandid: $u_R = Ri; \quad i = C\frac{du_c}{dt} \quad (q = u_c C)$ 1.6.7

Seosevõrrand: $u_c = u_S - u_R$ 1.6.8

Eeldus: sisendisse rakendatud pingeallikas u_s tagab sisendpinge ajalise muutuse $u_s(t)$ sõltumata elektriskeemis tarbitava voolu i väärtustest.

Mudel 1:

$$u_R = RC\frac{du_c}{dt} = RC\frac{d}{dt}(u_S - u_R) \Rightarrow \frac{du_R(t)}{dt} + \frac{1}{RC}u_R(t) = \frac{du_s(t)}{dt} \qquad 1.6.9$$

Mudel 2:

$$u_R = u_S - RC\frac{du_C}{dt} \;\Rightarrow\; \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC}u_C(t) = \frac{1}{RC}u_S(t) \qquad 1.6.10$$

Algtingimus $u_c(0)$ iseloomustab kondensaatorisse salvestunud elektrivälja energiat $0{,}5Cu_c^2$. Mudeli 1 puhul on vaja teada algtingimust muutujale u_c (0), mis pole ei sisend- ega väljundmuutuja.

1.6.4. VEDELIKE SEGISTI *(LIQUID'S MIXER)*

Paagis segatakse kahte liiki vedelikku.
Q – vedeliku kulu [l/s];
C – kasuliku komponendi kontsentratsioon [%]
V=S×h – vedeliku maht paagis [$dm^3 \Rightarrow l$]

Bilansivõrrandid:

Vedeliku koguhulk: $\frac{dV(t)}{dt} = Q_A(t) + Q_B(t) - Q_V(t)$ 1.6.11

Kasulik komponent:

$$\frac{d}{dt}(C_V(t)V(t) = C_A(t)Q_A(t) + C_B(t)Q_B(t) - C_V(t)Q_V(t) \qquad 1.6.12$$

Loomulik väljavool: $Q_V(t) = k\sqrt{h(t)} = k_V\sqrt{V(t)}$ 1.6.13

Mudel: $$\frac{dV(t)}{dt} = Q_A(t) + Q_B(t) - k_V\sqrt{V(t)} \qquad 1.6.14$$

$$C_V(t) + V(t)\frac{dC_V(t)}{dt} = \\ = C_A(t)Q_A(t) + C_B(t)Q_B(t) - C_V(t)k_V\sqrt{V(t)} \qquad 1.6.15$$

Sisendmuutujate $C_A(t)$, $Q_A(t)$, $C_B(t)$, $Q_B(t)$ ning algtingimuste $C_V(0)$ ja $V(0)$ korral saab arvutada muutujad $C_V(t)$ ning $V(t)$ (või $Q_V(t)$). Võrrandid ei kehti, kui vedeliku maht paagis ületab paagi maksimaalmahu või hakkab muutuma negatiivseks.

1.6.5. KEHADE SEOTUD LIIKUMINE *(MOTION OF COUPLED BODIES)*

Kaks keha massidega m_1 ja m_2 on seotud kokku jäikust c_V omava vedruga ning liiguvad vertikaalsuunas toimiva jõu $F(t)$ toimel raskusjõu väljas ($g = 9{,}81\ m/s^2$).

Newtoni võrrandid
$$m_1 \frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} = F(t) - m_1 g - F_V \qquad 1.6.16$$

$$m_2 \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} = F_V - m_2 g \qquad 1.6.17$$

Hooke'i seadus vedrule: $F_V = C_V(y_1 - y_2 - l_0)$ 1.6.18

l_O – vedru vaba pikkus (nullise venitusjõu F_V korral).

Mudel:
$$\frac{dv_1(t)}{dt} = F(t) = m_1 g - c_V(y_1(t) - y_2(t) - l_0) \qquad 1.6.19$$

$$\frac{dv_2(t)}{dt} = c_V(y_1(t) - y_2(t) - l_0) - m_2 g \qquad 1.6.20$$

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = v_1(t) \qquad 1.6.21$$
– kehade kiirused vertikaalsuunas.

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = v_2(t) \qquad 1.6.22$$

Olekuvõrrandid (selgitus osas 1.7.2)

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_1(t) \\ y_1(t) \\ v_2(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -c_V & 0 & c_V \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_V & 0 & -c_V \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ y_1(t) \\ v_2(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -m_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -m_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(t) \\ g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_v l_0 \\ 0 \\ -c_V l_0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad 1.6.23$$

Võrrandid eeldavad ainult vertikaalsuunalist liikumist. Raskusjõu väli toimib ekvivalentse konstantse sisendsuurusena. Konstantsed liikmed $c_v l_o$ on võrrandeis välditavad, kui kummagi keha asendit mõõdetakse erinevate nullpunktide suhtes, mille vahemaa on $c_v l_o$. Võrrandid lakkavad kehtimast, kui kehade kaugus peaks muutuma väiksemaks vedru minimaalpikkusest (täielikult kokkusurutud vedru).

1.6.6. ANDMETE TEISENDUSSÜSTEEM *(DATA TRANSFORMATION SYSTEM)*

Võrdse ajaintervalli (takti T) järgi mõõteseadmest saadavad andmed sisaldavad sageli juhuslikke mürakomponente, mille lihtsaks filtreerimiseks kasutatakse tihti nn. jooksva keskmise arvutamise algoritmi. Selle realiseeringut saab käsitleda andmete teisendussüsteemina, mille sisendiks u[k] on mõõteseadmest saadud "puhastamata" andmed. Eeldatakse, et andmed saabuvad diskreetsetel ajahetkedel, kusjuures k tähistab vastava takti järjestusnumbrit (suhtelist aega) teatavast alghetkest alates. Oletame, et keskmistamist rakendatakse neljale jooksvalt viimasele sisenddiskreedile. Siis avaldub väljundsuurus kujul

$$y[k] = \frac{1}{4}\left(u[k] + u[k - 1] + u[k - 2] + u[k - 3]\right) \qquad 1.6.24$$

mis on ka süsteemi matemaatiliseks diskreetaja-mudeliks. Mudelit saab kirjeldada ka teisel, alternatiivsel kujul

$$y[k] = y[k-1] + \frac{1}{4}\left(u[k] - u[k-4]\right) \qquad 1.6.25$$

mille puhul eelmisest keskmistamistulemusest lahutatakse viimane (“vananenud”) diskreet ning lisatakse uusim diskreet. Algoritmiline süsteemimudel ei täpsusta, millisel kujul on diskreetsed andmed esitatud, ega ka algoritmi realiseerimise viise. Selles avaldubki süsteemi kirjelduse idealiseering, sest kirjeldatud kujul on tegemist mittemateriaalse süsteemimudeliga.

1.6.7. TRIGER TUNNELDIOODIL (*TUNNEL DIODE TRIGGER*)

Tunneldioodis tekib üpris väikeste päripingete korral märgatav pärivool, mida põhjustab laengukandjate tunnelefekt väga õhukeses ja kõrge legeerimisastmega p-n siirdes. Dioodile rakendatava päripinge suurendamisel vool esialgu tunnelefekti nõrgenemise tõttu väheneb ning hakkab uuesti suurenema kõrgematel pingetel kooskõlas dioodi normaalsete karakteristikutega. Tulemusena on tunneldioodil joonisel 1.6.7a näidatud mittelineaarse pinge-voolu karakteristik $i_d(u_d)$, mille langevale osale vastab negatiivse takistuse piirkond. Reaalse dioodi matemaatiline mudel põhineb joonise 1.6.7b aseskeemil, mis arvestab lisaks ideaalsele tunneldioodile D veel p-n siirde mahtuvust C ning dioodi ja ühenduste resistiivset takistust R ning induktiivsust L (suurusjärkudega C~1 pF ja L~1 nH).
Aseskeemist tulenevad tunneldioodi dünaamilised võrrandid

$$L\frac{di_D}{dt} = u_D - i_D R - u_D \qquad 1.6.26$$

$$C\frac{dU_d}{dt} = i_D - i_d(u_d) \qquad \text{(arvestades, et } i_D = i_C + i_d\text{)} \qquad 1.6.27$$

Triger moodustatakse lülitirežiimilise tunneldioodi ja takisti järjestikühendusena (lisatakisti takistus on arvestatav aseskeemi takistuse R osana). Sisendpinge muutmisel muutub pinge tunneldioodil hüppeliselt tema karakteristiku $i_d(u_d)$ ühelt tõusvalt osalt (joonisel 1.6.6a) teisele või vastupidi, kusjuures hüppekestus võib olla ülilühikene (isegi alla nanosekundi).

1.6.8. JÄRELDUSED *(CONCLUSIONS)*

1. Orienteeritud **süsteemi suunatoimelisus** väljendub selles, et väljund on sisendist sõltuv, sisendmuutuja aga ei sõltu üldse süsteemist. Suunatoime on tüüpiline informatsioonilistele süsteemidele, seepärast nimetatakse nende süsteemide muutujaid sageli ka signaalideks.
2. Süsteemi kirjeldavate **võrrandite ja seoste allikaks** on vastava valdkonna üldised seaduspärasused (näit. füüsikaseadused). Osa matemaatilisi võrrandeid kirjeldab süsteemi elementide omadusi, osa elementidevahelisi sidemeid. Matemaatilisel mudelil võivad eksisteerida kehtivuspiirangud teatavate

muutujate lubatud muutumisvahemiku näol, mis tulenevad tegeliku süsteemi elementide ja sidemete iseärasustest. Ka võivad matemaatilised seosed olla teatavates piirkondades erinevad.
3. Matemaatilise mudeli **muutujad** (ajast sõltuvad liikmed) kirjeldavad süsteemis toimuvaid dünaamilisi protsesse ja on üldiselt (vähemalt põhimõtteliselt) mõõdetavad. Lisaks sisaldavad võrrandid suurusi (koefitsiente), mida nimetatakse süsteemi (või selle elementide) **parameetriteks** ja mis võivad olla konstandid, sõltuda ajast või ka mudeli muutujatest. Elementide ning süsteemi parameetrite vahelised seosed on igal süsteemil eripärased.
Matemaatilise mudeli kirjeldamisel tuleb iga muutuja jaoks valida sobiv mõõtühik, mille kaudu saadakse nii muutujate kui ka parameetrite arvulised väärtused. Sugugi pole vaja kasutada vastava füüsikalise suuruse põhiühikut, oluline on vaid võrrandites kasutatavate muutujate ühikute kooskõla. Näiteks on p.1.6.3 elektriskeemi mudelis hõlpsalt kasutatavad järgmised ühikud: vool – mA, pinge – V, takistus – kΩ, võimsus – mW, aeg – s, mahtuvus – mF. Nende ühikute kasutamise puhul pole p. 1.6.3 skeemi võrrandeis mingeid mõõtühikutest tingitud täiendavaid koefitsiente. Küll vajaksid sobivat mõõtühikute valikut uued muutujad, kui nimetatud võrrandile lisanduksid täiendavad võrrandid (süsteemi laiendamisel). Näiteks kooskõlaline eelnevaga on induktiivsuse ühik kH. Kui aga valida näiteks aja mõõtkava ühikuks ms, tuleb mahtuvusi mõõta ühikuga μF, induktiivsusi MH ja sagedusi kHz (energia kooskõlaline ühik oleks mJ).
4. Süsteemi matemaatilise mudeli võrrandite tüüpilisi liike:

4.1.**Algebralised**, mis seovad muutujate iga ajahetke väärtusi omavahel.

4.2.**Diferentsiaalvõrrandid**, mis seovad muutujaid kirjeldavaid ajafunktsioone. Lahendiks on funktsioonid, mille iseloom sõltub algtingimustest. Teisiti öeldes – kui diferentsiaalvõrrand seob süsteemi (või selle elemendi) sisend- ja väljundmuutujaid, siis väljundmuutuja väärtus teataval hetkel sõltub ka sisendite varasematest hetkväärtustest. Mõnikord nimetatakse seda nähtust ka süsteemi mäluks. Teisalt seostub see põhjuslikkuse printsiibiga (vt. p.1.7) – tagajärg ei saa eelneda põhjusele.

4.3.**Lineaarsed võrrandid** võivad liikmetena sisaldada vaid muutujaid esimeses astmes, muutujate korrutisi konstantsete või ajast sõltuvate parameetritega ning liikmete summasid-vahesid.

4.4 Kõik võrrandid, mis pole lineaarsed, on **mittelineaarsed**, sealhulgas liikmed muutujate korrutistega või kõrgemate astmetega, kõikvõimalikud funktsioonid muutujatest jne.

5. **Tüüpiline** dünaamilise süsteemi **matemaatiline mudel** pidevaja süsteemidel koosneb diferentsiaalvõrranditest. Sellist süsteemi nimetatakse ka **diferentsiaalsüsteemiks** või sellele väga lähedases tähenduses ka **siledaks süsteemiks**.
Diferentsiaalvõrrandite lahendamiseks peab teadma algtingimusi teataval alghetkel t_0. Need tingimused kajastavad sisuliselt füüsikalises süsteemis akumuleerunud energiat, ainet, laengut, liikumishulka jne, mis avaldavad vahetut mõju süsteemi edasisele käitumisele. Füüsikaseadustes esinevad muutujate tuletised kajastavadki akumulatsioonide muutusi vastavates füüsikalistes protsessides.

1.7. ABSTRAKTNE SÜSTEEMIMUDEL *(ABSTRACT SYSTEM MODEL)*

1.7.1. ABSTRAKTSE MUDELI OLEMUS *(NATURE OF ABSTRACT MODEL)*

Erinevate rakendusvaldkondade süsteemimudelid võivad osutuda matemaatilises mõttes ekvivalentseteks, erinedes vaid muutujate ja parameetrite füüsikalise sisu, tähistamisviisi ning kasutatud mõõtühikute poolest. Siis on ühe süsteemi mudeli omaduste tundmaõppimise tulemused hõlpsasti üle kantavad ekvivalentsetele süsteemidele. Kõiki taolisi ekvivalentseid süsteeme saab ühendada abstraktse süsteemi kontseptsiooni kaudu. **Abstraktne süsteem** on konkreetsete süsteemimudelite ekvivalentsiklassi ühtne esindaja, milles on säilitatud matemaatilised

funktsionaalsed seosed ja võrrandid, kuid on kõrvaldatud muutujate ja parameetrite füüsikaline või muu päritolu ning igasugused mõõtühikud. Viimaste “unustamisega” saame igast konkreetsest süsteemimudelist hõlpsasti abstraktse.
Abstraktset süsteemimudelit kasutades on hõlpus mudeli teisendamise, analüüsi ja ajaliste protsesside arvutusmeetodeid käsitleda puhtmatemaatiliste ülesannetena.
On võimalik konstrueerida ka selliseid matemaatilisi süsteemimudeleid, mida ei saa realiseerida konkreetse (näit. füüsikalise) süsteemina. Seepärast peab abstraktse süsteemimudeli tarbeks formuleerima säärased piirangud või lisatingimused, mis tagaks mudeli realiseeritavuse. Selliseid tingimusi nimetatakse tihti **füüsikalise realiseeritavuse (võimalikkuse) tingimusteks.**
Mõningad sellistest tingimustest:

1. **Aja orienteeritus**: ajamomentide t hulk $T=\{t_i\}$ on lineaarselt järjestatud reaalarvude hulk (R). Teisiti: $t\in R$; $\forall t_1, t_2 \rightarrow t_1 < t_2$ või $t_1 = t_2$ või $t_1 > t_2$ (välistav “või”).
2. **Muutujate reaalarvulisus**: kõik süsteemimuutujad on esitatavad reaalarvuliste hetkväärtustega aja funktsioonidena.
3. **Põhjuslikkus**: mistahes muutuja hetkväärtused võivad sõltuda teiste muutujate samadele või varasematele ajamomentidele vastavatest hetkväärtustest, kuid mitte tulevaste ajamomentide hetkväärtustest.

Kooskõlas p. 1.3.6 esitatuga eristatakse:

1. **Pidevaja süsteem**, mille puhul T on täielik reaalarvude hulk.
2. **Diskreetaja süsteem**, mille puhul T koosneb loenduvast hulgast isoleeritud ajahetkedest, mida võib samastada täisarvude hulgaga.

1.7.2. PIDEVAJA SÜSTEEMI OLEKUMUDEL *(STATE MODEL FOR CONTINUOUS TIME SYSTEM)*

Olekumudelis on seotud kolme liiki muutujad:

– **sisendmuutujad** $u_i(t)$, mis kajastavad välist toimet süsteemile ja orienteeritud süsteemis on sõltumatud süsteemist;
– **olekumuutujad** $x_j(t)$, mis kajastavad süsteemisiseseid akumulatsioone;
– **väljundmuutujad** $y_l(t)$, mis esitavad süsteemi reaktsiooni sisen-ditele ja on süsteemis otseselt kättesaadavad (mõõdetavad).

Mõningad oleku- ja väljundmuutujad võivad ka ühtida. Süsteemi seisund on igal hetkel määratud olekumuutujate väärtustega, mis täielikult kajastavad süsteemis varasematel ajahetkedel toimunud protsesside resultanti. Seepärast, alustades süsteemi analüüsi meelevaldsel ajahetkel t_0, on lisaks süsteemi mudelile vajalik ning piisav tunda olekumuutujate väärtusi sellel hetkel, s.o. $x_j(t_0)$. Olekumuutujate koguarvu nimetatakse ka **süsteemi järguks**.
Matemaatilise mudeli kirjeldamisel on otstarbekas kõik ühte liiki muutujad koondada vastavateks vektoriteks:

$$U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix} \qquad X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} \qquad 1.7.1$$

Sisendite vektor (r komponenti) — Olekute vektor (n komponenti) — Väljundite vektor (m komponenti)

Lisaks muudele eelistele on vektorite abil võimalik mudeleid kirjeldada sõltumatult tegelikust muutujate arvust.

Abstraktsel süsteemimudelil tuleb eelkõige määratleda kirjeldatud funktsioonide määramispiirkonnad (näiteks saab p. 1.6.4 kirjeldatud muutuja h(t) olla vaid positiivne, ületamata seejuures anuma kõrgusele vastavat väärtust).
Muutujatele vastavate funktsioonide kirjeldamine:

– **sisendfunktsioonide hulk** $\mathcal{U}=\{u(t): T\rightarrow\mathcal{V}\}$, kus T-orienteeritud ajamomentide hulk (pidev- või diskreetaja süsteem); $\mathcal{V}$-sisendfunktsioonide väärtuste hulk: $\mathcal{V}\subseteq R$ (reaalarvude hulk);
– **olekufunktsioonide hulk** $\mathcal{X}=\{x(t): T\rightarrow\mathcal{X}\}$, $\mathcal{X}\subseteq R$;
– **väljundfunktsioonide hulk** $\mathcal{Y}=\{y(t): T\rightarrow\mathcal{Y}\}$, $\mathcal{Y}\subseteq R$.

Iga funktsioonide hulga jaoks võivad veel kehtida teatavad piiravad tingimused.
Süsteemi olekumudel on määratav kahe funktsionaalse seosega, mis seostavad sisendite, olekute ja väljundite vektoreid

$$U(t)\in\mathcal{U}\xrightarrow{\varphi}X(t)\in\mathcal{X}\xrightarrow{\psi}Y(t)\in\mathcal{Y} \qquad 1.7.2$$

a) **Olekusiirdefunktsioon φ** *(state transition function)*

$$X(t)=\varphi\left(X(t_0),U(t)\Big|_{(t_0,t]},t,t_0\right),\ t\geq t_0 \qquad 1.7.3$$

mis tähendab, et kõik olekufunktsioonid on määratud vastaval ajahetkel, kui teame iga olekumuutuja algolekut $x(t_0)$ ning kõiki sisendfunktsioone ajaintervallis t_0 kuni soovitud ajahetkeni t. Kui olekusiirdefunktsioon sõltub otseselt ajast, nagu valemis näidatud, nimetatakse süsteemi (mudelit) **mittestatsionaarseks**. **Statsionaarse** süsteemi olekusiirdefunktsioon otseselt ajast ei sõltu.
b) **Väljundfunktsioon ψ** *(output function)*

$$Y(t)=\psi(X(t),U(t),t) \qquad 1.7.4$$

Avaldise kohaselt väljundfunktsioonide väärtused hetkel t on määratud sisend- ja olekufunktsioonide väärtustega samal hetkel t, kusjuures mittestatsionaarsel süsteemil on funktsioon ψ vahetult sõltuv ka ajast. Väga sageli ei sõltu väljundfunktsioon ψ ka sisendmuutujaist.
Siledatel süsteemidel on olekusiirdefunktsioon φ väljendatav diferentsiaalvõrrandite lahendina, väljundfunktsioon ψ on aga esitatav algebraliste võrranditega. Statsionaarse pidevaja süsteemivõrrandite seas igal olekuvõrrandil on kuju

$$\frac{dx_j(t)}{dt}=f_j\left(x_1(t),\ldots;x_n(t),u_1(t),\ldots,u_r(t)\right) \qquad j=1\ \ldots\ n \qquad 1.7.5$$

kus iga olekumuutuja tuletis on omaette võrrandis väljendatud teatud funktsioonina oleku- ja sisendmuutujaist. Võrrandite koguarv vastab ilmselt süsteemi järgule.
Olekuvõrrandi saab väljendada ka vektorkujul

$$\frac{dX(t)}{dt}=F(X(t),U(t)) \qquad 1.7.6$$

Mittestatsionaarsel süsteemil sõltuvad funktsioonid f_j (ka F) vahetult ajast.
Väljundvõrrandite standardne kuju on

$$y_l(t)=g_l\left(x_1(t),\ldots;x_n(t),u_1(t),\ldots,u_r(t)\right) \qquad l=1\ldots\ m \qquad 1.7.7$$

ehk vektorvormis mittestatsionaarsele süsteemile

$$Y(t)=G(X(t),U(t)) \qquad 1.7.8$$

Lineaarse süsteemi olekuvõrrandid erinevad vaid selle poolest, et võrrandites toodud funktsioonid F ja G peavad olema lineaarfunktsioonid (vt.p. 1.6.7).
Lineaarse süsteemi olekuvõrrandite üldkuju on

$$\frac{dX(t)}{dt}=A(t)X(t)+B(t)U(t) \qquad 1.7.9$$

$$\underset{m\times 1}{\overset{n\times 1}{Y(t)}} = \underset{m\times n}{\overset{n\times n}{C(t)}}\underset{n\times 1}{\overset{n\times 1}{X(t)}} + \underset{m\times r}{\overset{n\times r}{D(t)}}\underset{r\times 1}{\overset{r\times 1}{U(t)}} \qquad 1.7.10$$

Statsionaarsel süsteemil parameetrite maatriksid A, B, C, D ei sisalda argumendina aega ja on konstantsed. Parema mõistmise huvides on näidatud ka vektorite ja parameetrite maatriksite mõõtmed (ridade arv × veergude arv).

Parameetrite maatrikseid nimetatakse järgmiselt:

A– süsteemimaatriks, B– sisenditemaatriks, C– väljunditemaatriks, D– otsesidemaatriks.

Lineaarsete olekuvõrrandite näide on toodud osas 1.6.5 võrrandisüsteemina 1.6.23.

1.7.3. PIDEVAJA SÜSTEEMI ÜLEKANDEMUDEL *(CONTINUOUS TIME INPUT-OUTPUT MODEL)*

Ülekandemudelis on väljundmuutujad otseselt seostatud sisendmuutujatega. P. 1.7.2 arutluste najal on hõlbus mõista, et teatava sisendmuutuja rakendamisel süsteemi sisendisse hetkel t_0 pole reaktsioon väljundis üheselt määratud. Põhjuseks on süsteemisisese akumulatsiooni toime, mis on põhjustatud võimalikest protsessidest enne ajahetke t_0. Sõltuvus ainult sisendsignaalist tekib vaid siis, kui hetkel t_0 süsteemisisene akumulatsioon puudub täielikult, s.o. tegemist on **nullise algolekuga**.

Niisugust süsteemi seisundit nimetatakse mõnikord süsteemi rahuolekuks *(relaxed system)*. Siis kehtib seos

$$y(t) = H\left(u(t)\Big|_{(t_0,t]}, t, t_0\right), \qquad t \ge t_0 \qquad 1.7.11a$$

kusjuures statsionaarsel süsteemil ajamomendid t_0, t otsese argumendina puuduvad.

Sileda süsteemi puhul on sisend- ja väljundmuutuja seos määratud teatava differentsiaalvõrrandiga, mille lahend kirjeldab väljundmuutuja sõltuvust sisendfunktsioonist nulliste algtingimuste olukorras. Mittenullise algoleku arvestamine võib osutuda tülikaks. P. 1.6.3 toodud näite mudeli 2 korral, kus väljundmuutuja ühtib olekumuutujaga, saab mittenullist algolekut kirjeldada väljundmuutuja algväärtusega, kuid sama näite mudeli 1 puhul väljundmuutuja erineb olekut määravast muutujast ning viimane pole üldse seotud ülekande-diferentsiaalvõrrandiga ja seega on selle arvestamine võimatu.

Süsteemi ülekandeomadustes võib ilmneda teatud juhtudel veel **hilistumisnähtus** (*time delay; lag*), mis avaldub selles, et süsteemi väljund y(t) teatud hetkel sõltub ainuüksi sisendi u(t) vähemalt τ võrra varasematest hetkväärtustest. Sel puhul ülekandeseos tuleks 1.7.11a asemel esitada kujul

$$y(t+\tau) = H\left(u(t)\Big|_{(t_0,t)}, t, t_0\right), \qquad t \ge t_0 \qquad 1.7.11b$$

Suurust τ nimetatakse **hilistumisajaks (*time delay*).** Füüsikalistes süsteemides (elektriliinid, akustilised lained jne.) põhjustab hilistumist energia, võnkumiste vms piiratud levimiskiirus sisendist väljundisse. Negatiivne hilistumine, s.o. ennetumine pole süsteemides võimalik tingituna süsteemide põhjuslikkuse omadustest (p.1.7.1) (küll on võimalik suhteline ennetumine paralleelsetes süsteemides).

Lihtsaim **hilistav (hilistuv) süsteem** (*delayed system*) kordab väljundis täpselt sisendit konstantse hilistumisajaga τ

$$y(t)=u(t-\tau)$$

Niisuguse alamsüsteemi võib enamikus hilistavates süsteemides eraldada iseseisva alaosana.

1.7.4. DISKREETAJA SÜSTEEMI OLEKUMUDEL *(DISCRETE-TIME STATE MODEL)*

Diskreetaja süsteemi käitumine on määratud diskreetsetel, isoleeritud ajahetkedel, milliseid võib olla lõpmatu, kuid loenduv hulk. Sageli on taktihetked eristatud võrdse taktiperioodi T võrra. Sel

puhul saab kasutada suhtelise taktiaja mõistet, valides taktiperioodi T aja mõõtühikuks. Tulemusena saab muutujate, näit. u[k] taktihetki kirjeldada täisarvudega k=0,1,2,3,...
Diskreetaja süsteemi olekumudeli suhtes jääb kehtima palju p. 1.7.2 öeldust. Olulisim erinevus avaldub tuletise mõiste puudumises, mis pidevaja süsteemis mõõdab olekumuutujate muutumiskiirust (akumulatsioonimäära muutusi).
Diskreetaja võrrandis esinevate funktsioonide muutusi ajas saab kirjeldada diskreetfunktsiooni diferentsi abil (diskreetaja selgemaks eristamiseks kasutame nurksulgusid):

$$\Delta x[k]=x[k+1]-x[k] \qquad 1.7.12$$

Diferents on eenduv naaberdiskreetide vahe. Võimalik on kasutada ka taanduva diferentsi mõistet, kuid antud aines seda ei rakendata. Saab võtta tarvitusele ka kõrgemat järku diferentse

$$\Delta^2 x[k]=\Delta x[k+1]-\Delta x[k]=x[k+2]-2x[k+1]+x[k] \qquad 1.7.13$$

$$\Delta^3 x[k]=\Delta^2 x[k+1]-\Delta^2 x[k]=x[k+3]-3x[k+2]+3x[k+1]-x[k] \qquad 1.7.14$$

jne.
Avaldistest nähtub, et kõrget järku diferentse saab avaldada naaberdiskreetide kaudu avaldistena, mille koefitsiendid vastavad binoomkoefitsientidele ning liikmete märgid vahelduvad.
Tuletise mõiste definitsiooni kaudu saab leida tuletise ligikaudse seose diferentsidega

$$\frac{dx}{dt}=\lim_{T\to 0}\frac{x(t+T)-x(t)}{T}\approx\frac{\Delta x[t]}{T}=\frac{x[k+1]-x[k]}{T} \qquad 1.7.15$$

Rakendades seda p. 1.7.2 võrranditele saab leida ligikaudse diskreetaja süsteemi mudeli kuju. Siiski tingituna piirprotsessi võimatusest diferentsi korral võivad vead tuletise asendamisel osutuda küllalt suurteks. Üldjuhul saab anda võrrandid kujul

$$\frac{dX(t)}{dt}=AX(t)+BU(t) \qquad X[k+1]=FX[k]+GU[k] \qquad 1.7.16$$

$$\Rightarrow$$

$$Y(t)=CX(t)+DU(t) \qquad Y[k]=CX[k]+DU[k] \qquad 1.7.17$$

mis vastavad lineaarsete diskreetaja süsteemide olekuvõrrandite tüüpkujule. Mittelineaarse süsteemi võrrandid ilmselt omandavad kuju

$$X[k+1]=\mathcal{F}(X[k],U[k]) \qquad 1.7.18$$

$$Y[k]=\mathcal{G}(X[k],U[k]) \qquad 1.7.19$$

Kõiki neid võrrandeid nimetatakse diferentsvõrranditeks, vaatamata diferentside otsesele puudumisele neis. Kahe naaberdiskreedi olemasolu on samaväärne esimese diferentsi eksisteerimisega võrrandeis. Nelja naaberdiskreedi olemasolul võrrandeis tuleb rääkida kolmandat järku diferentsvõrrandist. Ülalkirjeldatud mudeli olekusiirdevõrrandid on sisuliselt esindatud esimest järku diferentsvõrrandite süsteemina.

1.7.5. DISKREETAJA SÜSTEEMI ÜLEKANDEMUDEL *(DISCRETE TIME INPUT-OUTPUT MODEL)*

Diskreetaja süsteemi ülekandemudelil on võrreldes p. 1.7.3 käsitletud pidevaja ülekandemudeliga põhierinevusena diferentsvõrrand. Statsionaarse süsteemi lahendil on nullistel algtingimustel avaldistele 1.7.11 analoogiline kuju

$$Y[k]=H\left(u[i]\big|_{i=0\ldots k}\right) \qquad 1.7.20$$

Süsteemi järk vastab diferentsvõrrandi järgule, mis on ühe võrra väiksem naaberdiskreetide üldarvust ülekandemudeli diferentsvõrrandis.